Universität Tübingen
Mathematisches Institut
D. Mansour, J. Seyrich

Tübingen, den 19.06.2013

9. Übungsblatt zu Algorithmen der Numerischen Mathematik

Aufgabe 29: (Tschebyscheff-Polynome II)

Zeigen Sie, dass das k-te Tschebyscheff-Polynom T_k, $k \in \mathbb{N}$, für $|t| \geq 1$ die Darstellung

$$T_k(t) = \frac{1}{2}\left(\left(t + \sqrt{t^2-1}\right)^k + \left(t + \sqrt{t^2-1}\right)^{-k}\right)$$

besitzt. Zeigen Sie damit, dass für $\kappa > 1$

$$\left|T_k\left(-\frac{\kappa+1}{\kappa-1}\right)\right| \geq \frac{1}{2}\left|\frac{\sqrt{\kappa}-1}{\sqrt{\kappa}+1}\right|^{-k}.$$

Aufgabe 30: (Konvergenz im cg-Verfahren)

Die Eigenwerte von A (symmetrisch und positiv definit) seien $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n > 0$. Zeigen Sie: Mit $\kappa' = \lambda_2/\lambda_n$ gilt für den Fehler im cg-Verfahren

$$\|x_k - x\|_A \leq 2\left(\frac{\sqrt{\kappa'}-1}{\sqrt{\kappa'}+1}\right)^{k-1} \|x_0 - x\|_A \quad \text{für } k \geq 2.$$

(Falls $\lambda_1 \gg \lambda_2$, so ist dies deutlich schärfer als die ähnliche Abschätzung mit $\kappa = \lambda_1/\lambda_n$ der Vorlesung.)

Hinweis: $q_k(\lambda) = \widetilde{q}_{k-1}(\lambda) \cdot (\lambda_1 - \lambda)/\lambda_1$.

Aufgabe 31: (Vorkonditionierung)

a) Beim vorkonditionierten cg-Verfahren gelte für die Ausgangsmatrix A und die Vorkonditionierungsmatrix B folgende Abschätzung:

$$\gamma(v, B^{-1}v) \le (v, Av) \le \Gamma(v, B^{-1}v), \qquad \text{für alle } v \in \mathbb{R}^n,$$

wobei $\gamma, \Gamma > 0$.

Zeigen Sie, daß für den Fehler nach k Schritten gilt

$$\|x_k - x\|_A \le 2 \left(\frac{\sqrt{\tilde{\kappa}} - 1}{\sqrt{\tilde{\kappa}} + 1} \right)^k \|x_0 - x\|_A, \qquad \text{mit } \tilde{\kappa} = \frac{\Gamma}{\gamma}.$$

b) Das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit symmetrischer und positiv definiter Matrix A soll mit und ohne Vorkonditionierung gelöst werden. Die Konditionszahl von A sei 10.000, die des vorkonditionierten Systems 100.

Geben Sie obere Schranken für die Anzahl der Iterationsschritte an, die die Methode des steilsten Abstiegs (ohne Vorkonditionierung) und das cg-Verfahren (mit und ohne Vorkonditionierung) benötigen, um den Fehler (gemessen in der A-Norm) um den Faktor 10^5 zu reduzieren?

Aufgabe 32: (Fletcher–Reeves)

Beim cg-Verfahren von Fletcher–Reeves kann man die eindimensionalen Minimierungsverfahren näherungsweise lösen bis die Abbruchbedingung

$$|g_{k+1}^T d_k| \le \sigma g_k^T d_k, \qquad \sigma \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$$

erfüllt ist.

Zeigen Sie, dass dann das Verfahren für jedes k ein Abstiegsverfahren ist, d.h., dass die Suchrichtung $-d_k$ eine Abstiegsrichtung ist, d.h., dass für kleine $\alpha > 0$ gilt

$$f(x_k - \alpha d_k) < f(x_k).$$

Hinweis: Zeigen Sie für $d_0 = g_0$ mit vollständiger Induktion

$$\left| \frac{g_k^T d_k}{g_k^T g_k} - 1 \right| \le \sum_{j=0}^{k} \sigma^j - 1.$$

Welche Werte kann $g_k^T d_k$ also annehmen? Interpretieren Sie nun $g_k^T d_k$ geometrisch.

Besprechung der Aufgaben in den Übungen am 26.06.2013.