Universität Tübingen
Mathematisches Institut
D. Mansour, J. Seyrich

Tübingen, den 08.05.2013

4. Übungsblatt zu Algorithmen der Numerischen Mathematik

Aufgabe 11: (Wiederholung, Satz über implizite Funktionen)

Machen Sie sich (wieder) mit dem aus dem Grundstudium bekannten Satz über implizite Funktionen vertraut. Betrachten Sie nun die Niveaufläche $F = 0$ der Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $F(x, y) = 1 - x^2 - y^2$. Wie und in welchen Bereichen kann man y als explizite Funktion von x darstellen?

Aufgabe 12: (Wiederholung, Lineare Algebra)

a) Seien $u, v \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

$$\det(I + uv^T) = 1 + u^T v.$$

b) Zeigen Sie: Ist B eine normale und A eine beliebige $n \times n$ Matrix, dann gibt es zu jedem Eigenwert λ von A einen Eigenwert μ von B mit

$$|\lambda - \mu| \leq ||A - B||_2$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst: Ist λ kein Eigenwert von B, so gilt:

$$||(\lambda I - B)^{-1}||_2 = \frac{1}{\min\limits_{\mu \in \lambda(B)} |\lambda - \mu|}.$$

Betrachten Sie dann für den zu λ gehörenden Eigenvektor x von A den Vektor $(A - B)x$.

Aufgabe 13: (Kondition)

a) Sei λ eine einfache Nullstelle des charakterisitischen Polynoms von $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass die Konditionszahl des Eigenwerts λ von A existiert (d.h. $u^* v \neq 0$) und invariant ist unter unitären Ähnlichkeitstransformationen ist (d.h., dass der Eigenwert λ der Matrix U^*AU mit unitärer Matrix U dieselbe Konditionszahl hat).

b) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonalisierbar mit paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ und zugehörigen Eigenvektoren $v_1, \ldots, v_n$ und Links-Eigenvektoren $u_1^*, \ldots, u_n^*$. Sei weiters $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig.

Zeigen Sie: Die Matrix $A + \varepsilon C$ hat die Eigenvektoren

$$v_j(\varepsilon) = v_j + \varepsilon \sum_{i=1, i\neq j}^{n} \frac{1}{\lambda_j - \lambda_i} \frac{u_i^* C v_j}{u_i^* v_i} v_i + O(\varepsilon^2)$$

Hinweis: Drücken Sie $v_j'(0)$ als Linearkombination der v_i aus. Benützen Sie zur Bestimmung der Koeffizienten von v_i $(i \neq j)$, dass $u_i^* v_j = 0$ für $i \neq j$ (warum?). Betrachten Sie ein geeignet skaliertes $v_j(\varepsilon)$, um auch den Koeffizienten von v_j wie behauptet zu bekommen.

<u>Aufgabe 14:</u> (KonditionII)

Berechnen Sie die Eigenwerte der $n \times n$ Matrix $\tilde{A} = A + \varepsilon C$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \vdots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \hat{e}_n \hat{e}_1^T.$$

Was ergibt sich für $n = 8$ und $\varepsilon = 10^{-8}$?

Besprechung der Aufgaben in den Übungen am 15.05.2013.