Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 01.12.2020

4. Übungsblatt zur Numerik

Aufgabe 13:

(a) Berechnen Sie das Hermite-Interpolationspolynom zu den Daten

x_j	-1	1
y_j	1	7
y'_j	-1	3

sowie $p(0)$.

(b) Sei $f \in C^4[x_0, x_1]$, $h = x_1 - x_0$ und p sei das kubische Hermite-Interpolationspolynom mit $p(x_i) = f(x_i)$ und $p'(x_i) = f'(x_i)$ für $i = 0, 1$. Zeigen Sie:

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{h^4}{384} \max_{\xi \in [x_0, x_1]} |f^{(4)}(\xi)|, \quad x \in [x_0, x_1].$$

Aufgabe 14: Der eingespannte kubische Spline s erfülle die Interpolationsbedingungen

j	0	1	2	3
x_j	0	1	2	3
y_j	-4	9	35	70

sowie $s'(0) = 10$ und $s'(3) = 40$. Berechnen Sie $s(x)$ an der Stelle $x = 1.5$.

Aufgabe 15: Falls die Werte der Ableitungen an den Randpunkten nicht bekannt sind, verwendet man bei der Spline-Interpolation häufig die „not-a-knot“-Bedingungen

$$s_1'''(x_1) = s_2'''(x_1), \qquad s_{n-1}'''(x_{n-1}) = s_n'''(x_{n-1}),$$

die besagen, dass der Spline auf den Teilintervallen $[x_0, x_2]$ und $[x_{n-2}, x_n]$ durch je ein einziges kubisches Polynom gegeben ist.

Stellen Sie für eine äquidistante Zerlegung $x_j = x_0 + jh$ $(j = 0, 1, \ldots, n)$ das Gleichungssystem für den interpolierenden kubischen Spline mit „not-a-knot“-Bedingungen auf. Zeigen Sie, dass es stets eine eindeutige Lösung besitzt.

Aufgabe 16: Stellen Sie für eine äquidistante Zerlegung $x_j = x_0 + jh$ $(j = 0, 1, \ldots, n)$ das Gleichungssystem für den kubischen Spline s mit

$$s(x_j) = 0 \qquad \text{für } j = 0, \ldots, n$$
$$s'(x_0) = 1 \quad s'(x_n) = 0$$

auf. Zeigen Sie, dass die Steigungen $v_j = s'(x_j)$ mit wachsendem j rasch abfallen.

Interpretation: Störungen in den Ableitungen am Rand wirken sich im interpolierenden Spline auf Intervallen weg von x_0 kaum aus.

Besprechung der Übungsaufgaben am 08. und 09. Dez. 2020