

10. Übungsblatt zur Numerik

Aufgabe 37:

Es sei die Cholesky-Zerlegung einer symmetrisch positiv definiten Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ durch $A = LL^T$ gegeben. Zeigen Sie:

(a) Für $i = 1, \dots, n$ gilt $\|L\|_2^2 = \max_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{\mathbf{x}^T A \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} \geq l_{ii}^2$.

(b) Für $i = 1, \dots, n$ gilt $l_{ii}^2 \geq \min_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{\mathbf{x}^T A \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} = \frac{1}{\|L^{-1}\|_2^2}$.

(c) Für die Konditionszahl $\text{cond}_2(L) = \|L\|_2 \|L^{-1}\|_2$ gilt $\text{cond}_2(L) \geq \max_{1 \leq i, k \leq n} \left| \frac{l_{ii}}{l_{kk}} \right|$.

Aufgabe 38: Sei Q eine orthogonale $(n \times n)$ -Matrix, $n > 1$. Zeigen Sie, dass Q als Produkt von höchstens n Householder-Transformationen geschrieben werden kann (d.h., jede orthogonale Transformation des \mathbb{R}^n ist eine Hintereinanderausführung von höchstens n Reflexionen).

Aufgabe 39: Wenden Sie den Householder-Algorithmus an auf die Rotationsmatrix

$$A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

Geben Sie eine geometrische Interpretation des Ergebnisses.

Aufgabe 40: (Ausgleichsgerade)

Es liege das mathematische Gesetz $y = x_1 z + x_2$ mit zwei unbekanntem Parametern x_1, x_2 vor, zu dem ein Satz von Messdaten $\{y_l, z_l\}_{l=1, \dots, m}$ mit $z_l = l$ gegeben sei.

(a) Stellen Sie das zugehörige lineare Gleichungssystem $Ax = y$ auf. Wie lautet die Normalgleichung für das lineare Ausgleichsproblem?

(b) Berechnen Sie die Cholesky-Zerlegung $A^T A = LL^T$.

(c) Schätzen Sie die Konditionszahl $\text{cond}_2(L)$ mit Hilfe von Aufgabe 37 ab.

Programmieraufgabe 5: In dieser Aufgabe implementieren Sie die Berechnung einer Ausgleichs-
parabel. Es liege das mathematische Gesetz $y = ax^2 + bx + c$ mit drei unbekanntem Parametern a ,
 b und c vor. Schreiben Sie eine Funktion `[a,b,c] = quadReg(x,y)`, die die Koeffizienten a , b und
 c zu gegebenen Daten $(x_i, y_i)_{i=1}^n$ ($n \geq 3$) bestimmt. Dabei soll eine Cholesky-Zerlegung der Matrix
 $A^T A$ benutzt werden, um die zugehörige Geradengleichung zu lösen.

Sie dürfen Programmieraufgabe 4 verwenden.

Gegeben seien nun die Daten

x_i	1	2	4	5	7	8	9
y_i	-3.7	-4.3	-3.3	0.2	16.1	24.2	38.5

Schreiben Sie ein Skript `testQuadReg`, welches obige Datenpunkte sowie die berechnete Regressi-
onsparabel für $0 \leq x \leq 10$ in ein Schaubild plottet.

Besprechung in den Übungen am 08.01.2019.

Abgabe der Programmieraufgabe bis spätestens 15.01.2019, 23:59 Uhr.

**Das Numerik-Team wünscht euch frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins
neue Jahr!**