

1 Vollständige Induktion

Beispiel 1.1. (Kleiner Gauß)

Für jedes $n \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ gilt $\underbrace{\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}}_{A(n)}$.

(Hier ist $n_0 = 1$, siehe nächste Seite).

Beweis. Vollständige Induktion über $n \in \mathbb{N}$.

IA: $n = 1$. Es gilt

$$\sum_{i=1}^n i = \sum_{i=1}^0 i = 1 = \frac{1 \cdot 2}{2} = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

IV: Gelte also für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$, dass

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

IS: $n \mapsto n + 1$: Zu zeigen ist

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} i &= 1 + 2 + \dots + n + n + 1 = (1 + 2 + \dots + n) + n + 1 \\ &= \sum_{i=1}^n i + n + 1 \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 && \text{(IV)} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} \\ &= \frac{n^2 + n + 2n + 1}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\ &= \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}. \end{aligned}$$

□

1.1 Was ist vollständige Induktion und wofür wird sie verwendet?

Vollständige Induktion ist eine Beweistechnik, die eng mit der Zahlenmenge der natürlichen Zahlen verwoben ist. Sie wird verwendet, um zu beweisen, dass eine Aussage $A(n)$, die von einer natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ abhängt, für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt, für das $n \geq n_0$ für einen Startwert $n_0 \in \mathbb{N}_0$ erfüllt ist. Meistens ist $n_0 \in \{0, 1\}$.

Dabei geht man wie folgt vor:

1. Man zeigt die Gültigkeit von $A(n_0)$ (der Induktionsanfang „IA“)
2. Man nimmt $A(n)$ für ein beliebiges aber festes $n \geq n_0$ als richtig an (Induktionsvoraussetzung/Induktionsannahme „IV“) und folgert daraus die Gültigkeit von $A(n+1)$ (Induktionsschritt „IS“).

1.1.1 Wieso genügt das für einen formalen Beweis?

Wir wollen also zeigen, dass $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq n_0 \in \mathbb{N}_0$ gezeigt ist, falls wir 1. und 2. gezeigt haben. Sei also $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq n_0$ beliebig. Nach 1. gilt $A(n_0)$. Wegen 2. ist dann $A(n_0 + 1)$ richtig (wähle $n = n_0$ in 2.). Wieder wegen 2. ist dann $A(n_0 + 2)$ richtig (wähle $n = n_0 + 1$ in 2.). Iterieren wir dieses Vorgehen $n - n_0$ mal, erhalten wir die Richtigkeit von $A(n_0 + n - n_0) = A(n)$.

Dies kann man sich auch anhand des Dominoeffekts veranschaulichen: Nehme z.B. $n_0 = 1$ und stelle für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0 = 1$ (also für jedes $n \in \mathbb{N}$) einen Dominostein auf. Die Aussage „ $A(n)$ ist richtig“ soll dabei bedeuten, dass der n -te Dominostein umfällt. 1. besagt nun, dass wir den 1-ten Dominostein umschubsen dürfen ($A(1)$ ist richtig).

2. besagt, dass wir die Dominosteine so aufstellen dürfen, dass mit dem Fallen des n -ten Steins ($A(n)$ ist richtig) auch der $(n + 1)$ -te Stein fällt ($A(n + 1)$ ist richtig). Wenn 1. und 2. gleichzeitig erfüllt sind, werden also schlussendlich alle Dominosteine umfallen (also gilt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$).

Beispiel 1.1.1. (Teleskopsumme)

Seien $a_i \in \mathbb{R}$ (=: reelle Zahlen) für jedes $i \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}_0$

$$\underbrace{\sum_{i=0}^n (a_i - a_{i+1})}_{A(n)} = a_0 - a_{n+1} .$$

(Hier ist wieder $n_0 = 0$.)

Dies leuchtet auch unmittelbar ein, wenn man es sich mit der \dots -Notation aufschreibt:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n (a_i - a_{i+1}) &= (a_0 - a_1) + (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \dots + (a_{n-1} - a_n) + (a_n - a_{n+1}) \\ &= a_0 + (-a_1 + a_1) + (-a_2 + a_2) + \dots + (-a_n + a_n) - a_{n+1} \\ &= a_0 - a_{n+1} . \end{aligned}$$

Der saubere Beweis gelingt mit Induktion. Anhand dieses Beispiels klären wir, wie man formal einen Induktionsbeweis für die Übungen aufschreibt:

Seien $a_i \in \mathbb{R}$ für jedes $i \in \mathbb{N}_0$ beliebig.

Behauptung 1.1.2.

Es gilt für jedes $n \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{i=0}^n (a_i - a_{i+1}) = a_0 - a_{n+1}.$$

Beweis. Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$.

IA: $n = 0$. Es gilt

$$\sum_{i=0}^n (a_i - a_{i+1}) = \sum_{i=0}^0 (a_{i+1} - a_i) = a_0 - a_1 = a_0 - a_{n+1}.$$

IV: Es gelte also für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{i=0}^n (a_i - a_{i+1}) = a_0 - a_{n+1}.$$

IS: $n \mapsto n + 1$. Zu zeigen ist

$$\sum_{i=0}^{n+1} (a_i - a_{i+1}) = a_0 - a_{(n+1)+1}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n+1} (a_i - a_{i+1}) &= \sum_{i=0}^n (a_i - a_{i+1}) + a_{n+1} - a_{(n+1)+1} \\ &= a_0 - a_{n+1} + a_{n+1} - a_{n+2} \\ &= a_0 - a_{(n+1)+1}, \end{aligned} \tag{IV}$$

und das war zu zeigen.

□

Beispiel 1.1.3. (Geometrische Summe)

Sei $q \in \mathbb{R}$ mit $q \neq 1$ beliebig. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}_0$

$$\underbrace{\sum_{i=0}^n q^i}_{A(n)} = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

(Hier wieder $n_0 = 0$.) Zwei Beweise:

(a) *Beweis.* Beweis durch Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$.

IA: $n = 0$. Es gilt

$$\sum_{i=0}^n q^i = \sum_{i=0}^0 q^i = q^0 = 1 = \frac{1 - q}{1 - q} = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

IV: Gelte also für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}_0$, dass

$$\sum_{i=0}^n q^i = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

IS: $n \mapsto n + 1$: Zu zeigen ist

$$\sum_{i=0}^{n+1} q^i = \frac{1 - q^{(n+1)+1}}{1 - q}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n+1} q^i &= q^{n+1} + \sum_{i=0}^n q^i \\ &= q^{n+1} + \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \\ &= \frac{q^{n+1}(1 - q)}{1 - q} + \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \\ &= \frac{q^{n+1} - q^{n+2} + 1 - q^{n+1}}{1 - q} \\ &= \frac{1 - q^{n+2}}{1 - q} \\ &= \frac{1 - q^{(n+1)+1}}{1 - q}, \end{aligned} \tag{IV}$$

und das war zu zeigen. □

(b) *Beweis.* Beweis unter Verwendung der Teleskopsumme. Es genügt auch für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ zu zeigen

$$(1 - q) \sum_{i=0}^n q^i = 1 - q^{n+1}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} (1 - q) \sum_{i=0}^n q^i &= \sum_{i=0}^n (1 - q)q^i \\ &= \sum_{i=0}^n \underbrace{(q^i - q^{i+1})}_{=: a_i} \\ &= \sum_{i=0}^n (a_i - a_{i+1}) \\ &= a_0 - a_{n+1} \\ &= q^0 - q^{n+1} \\ &= 1 - q^{n+1}, \end{aligned} \tag{Teleskopsumme}$$

und das war zu zeigen. □

Beispiel 1.1.4. (Indexshift)

Seien wieder $a_i \in \mathbb{R}$ für jedes $i \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \mathbb{N}_0$ beliebig. Zeige: Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\underbrace{\sum_{i=0}^n a_i = \sum_{i=k}^{n+k} a_{i-k}}_{A(n)} .$$

(Hier: $n_0 = 0$.)

Beweis. Seien also $a_i \in \mathbb{R}$ für jedes $i \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \mathbb{N}_0$ beliebig. Wir zeigen die Behauptung durch Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$.

IA: $n = 0$: Es gilt

$$\sum_{i=0}^n a_i = \sum_{i=0}^0 a_i = a_0 = a_{k-k} = \sum_{i=k}^k a_{i-k} = \sum_{i=k}^{n+k} a_{i-k} . \quad (k - k = 0 \text{ für alle } k \in \mathbb{N})$$

IV : Es gelte also für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{i=0}^n a_i = \sum_{i=k}^{n+k} a_{i-k} .$$

IS $n \mapsto n + 1$: Zu zeigen ist:

$$\sum_{i=0}^{n+1} a_i = \sum_{i=z}^{(n+1)+k} a_{i-k} = \sum_{i=k}^{n+k+1} a_{i-k} .$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n+1} a_i &= \sum_{i=0}^n a_i + a_{n+1} \\ &= \sum_{i=k}^{n+k} a_{i-k} + a_{n+1} && \text{(IV)} \\ &= \sum_{i=k}^{n+k+1} a_{i-k} + a_{n+1+k-k} \\ &= \sum_{i=z}^{n+k+1} a_{i-k} \\ &= \sum_{i=z}^{n+1+k} a_{i-k} \end{aligned}$$

und das war zu zeigen.

□

Hausaufgabe 1.1.5. (freiwillig)

Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \neq 3$ gilt $2^n \geq n^2$. Bei welchem $n \in \mathbb{N}_0$ starten wir die Induktion, d.h. wie sieht $n_0 \in \mathbb{N}_0$ hier aus? Antwort: $n_0 = 4$. Rechne $A(n)$ für $n \in \{0, 1, 2\}$ explizit nach.

Beweis. $n = 0$: $0 \geq 0$, $n = 1$: $2 \geq 1$, $n = 2$: $4 \geq 4$. Rest mit Induktion über $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 4$.

IA: $n = 4$: Es gilt $2^4 = 16 \geq 16 = 4^2$.

IV: Gelte also für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$ mit dass $2^n \geq n^2$.

IS: $n \mapsto n + 1$: Zu zeigen ist $2^{n+1} \geq (n + 1)^2$. Es gilt aber

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &= 2 \cdot 2^n \geq 2n^2 && \text{(IV)} \\ &= n^2 + n^2 \\ &\geq n^2 + 4n && (n \geq 4) \\ &= n^2 + 2n + 2n \geq n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2. \end{aligned}$$

□

Bemerkung 1.1.6.

Beispiel 1.1.4 lässt sich auch wie folgt formulieren: Seien $a_i \in \mathbb{R}$ für jedes $i \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \mathbb{N}_0$ beliebig. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=0}^n a_{i+k} = \sum_{i=k}^{n+k} a_i.$$

Beispiel 1.1.7. (Restreihe der geometrischen Reihe)

In der Vorlesung haben wir die geometrische Reihe kennengelernt. Es gilt

$$\sum_{i=0}^{\infty} q^i := q^0 + q^1 + q^2 + \dots = \frac{1}{1 - q},$$

für $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$ (alternativ formuliert: $q \in (-1, 1) := \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$). Dieser Ausdruck für die geometrische Reihe ist äquivalent zur Formulierung

$$\frac{1}{1 + x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

mit $|x| < 1$ aus der Vorlesung. Man kann die Formel mit Hilfe der geometrischen Summe beweisen. Es gilt

$$\sum_{i=0}^n q^i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n q^i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1 - \lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}.$$

Können wir daraus auch

$$\sum_{i=k}^{\infty} q^i = q^k + q^{k+1} + q^{k+2} + \dots$$

für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}_0$ und $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$ berechnen? Zwei Ideen:

(a) Benutze den Indexshift Beispiel 1.1.4: Setze $a_i := q^i$ für jedes $i \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=k}^{\infty} q^i &= q^k + q^{k+1} + \dots \\
 &= \lim_{m \rightarrow \infty} (q^k + q^{k+1} + \dots + q^m) \\
 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=k}^m q^i \\
 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=k}^m q^i \\
 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=k}^{m-k+k} q^i \underbrace{q^0}_{=1} \\
 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=k}^{m-k+k} q^i q^{k-k} \\
 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=k}^{m-k+k} \underbrace{q^{i-k}}_{=a_{i-k}} q^k \\
 &= q^k \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=k}^{(m-k)+k} a_{i-k} \\
 &= q^k \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{m-k} a_i && \text{(Beispiel 1.1.4 mit } n := m - k) \\
 &= q^k \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{m-k} q^i \\
 &= q^k \sum_{i=0}^{\infty} q^i \\
 &= q^k \frac{1}{1 - q}
 \end{aligned}$$

(b) Alternativ gilt mit Bemerkung 1.1.6

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=k}^{\infty} q^i &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=k}^m q^i \\
 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=k}^{m-k+k} a_i \\
 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{m-k} a_{i+k} && \text{(Bemerkung 1.1.6 mit } n := m - k) \\
 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{m-k} q^{i+k} \\
 &= q^k \sum_{i=0}^{\infty} q^i \\
 &= q^k \frac{1}{1 - q}.
 \end{aligned}$$

(c) Wir addieren die fehlenden k Summanden und ziehen sie wieder ab:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=k}^{\infty} q^i &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=k}^m q^i \\
 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=k}^m q^i + \sum_{i=0}^{k-1} q^i - \sum_{i=0}^{k-1} q^i \right) \\
 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=0}^m q^i - \sum_{i=0}^{k-1} q^i \right) \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} q^i - \sum_{i=0}^{k-1} q^i \\
 &= \frac{1}{1 - q} - \frac{1 - q^{(k-1)+1}}{1 - q} && \text{(Beispiel 1.1.3 mit } n := k - 1) \\
 &= \frac{q^k}{1 - q}.
 \end{aligned}$$

Satz 1.1.8. (Binomischer Lehrsatz)

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(x + y)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^j y^{n-j}.$$

Beweis. Durch vollständige Induktion über $n \in \mathbb{N}$.

IA: $n = 1$: Es gilt

$$(x + y)^n = (x + y)^1 = x + y = \binom{1}{0} x^0 y^{1-0} + \binom{1}{1} x^1 y^{1-1} = \sum_{j=0}^1 \binom{1}{j} x^j y^{1-j} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^j y^{n-j}.$$

IV: Gelte also für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$

$$(x + y)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^j y^{n-j}.$$

IS: $n \mapsto n + 1$: Zu zeigen ist

$$(x + y)^{n+1} = \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} x^j y^{n+1-j}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} (x + y)^{n+1} &= (x + y)(x + y)^n = (x + y) \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^j y^{n-j} && \text{(IV)} \\ &= x \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^j y^{n-j} + y \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^j y^{n-j} \\ &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^{j+1} y^{n-j} + \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^j y^{n+1-j} \\ &= x^{n+1} + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} x^{j+1} y^{n-j} + \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} x^j y^{n+1-j} + y^{n+1} \\ &= x^{n+1} + \sum_{j=1}^n \binom{n}{j-1} x^{(j-1)+1} y^{n-(j-1)} + \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} x^j y^{n+1-j} + y^{n+1} \\ &\quad \text{(Indexshift in erster Summe um 1 nach oben, (*))} \\ &= x^{n+1} + \sum_{j=1}^n \binom{n}{j-1} x^j y^{n+1-j} + \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} x^j y^{n+1-j} + y^{n+1} \\ &= x^{n+1} + \sum_{j=1}^n \left(\binom{n}{j-1} x^j y^{n+1-j} + \binom{n}{j} x^j y^{n+1-j} \right) + y^{n+1} \\ &= x^{n+1} + \sum_{j=1}^n \left(\binom{n}{j-1} + \binom{n}{j} \right) x^j y^{n+1-j} + y^{n+1} \\ &= x^{n+1} + \sum_{j=1}^n \binom{n+1}{j} x^j y^{n+1-j} + y^{n+1} && \text{(Übung)} \\ &= \underbrace{\binom{n+1}{n+1} x^{n+1} y^{n+1-(n+1)}}_{j=n+1} + \sum_{j=1}^n \binom{n+1}{j} x^j y^{n+1-j} + \underbrace{\binom{n+1}{0} x^0 y^{n+1-0}}_{j=0} \\ &= \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} x^j y^{n+1-j} \end{aligned}$$

Bei (*) wähle $a_j := \binom{n}{j} x^{j+1} y^{n-j}$. Dann ist $a_{j-1} = \binom{n}{j-1} x^{(j-1)+1} y^{n-(j-1)} = \binom{n}{j-1} x^j y^{n+1-j}$

und mit 1.1.4 angewendet auf $k := 1$ folgt

$$\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} x^{j+1} y^{n-j} = \sum_{j=0}^{n-1} a_j = \sum_{j=0+1}^{n-1+1} a_{j-1} = \sum_{j=1}^n a_{j-1} = \sum_{j=1}^n \binom{n}{j-1} x^{(j-1)+1} y^{n-(j-1)}.$$

□

2 Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel

Satz 2.1.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und beliebige reelle Zahlen a_1, a_2, \dots, a_n mit $a_i > 0$ für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}.$$

Es gilt Gleichheit genau dann, wenn $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Lemma 2.2. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig und seien a_1, a_2, \dots, a_n positive reelle Zahlen. Setze $A_k := \frac{a_1 + \dots + a_k}{k}$ für jedes $k \in \{1, \dots, n\}$. Dann gilt

$$A_k^k \geq a_k \frac{1}{k} A_{k-1}^{k-1}.$$

Beweis. Es gilt $\frac{A_k}{A_{k-1}} > 0$, somit $\frac{A_k}{A_{k-1}} - 1 > -1$. Mit der Ungleichung von Bernoulli folgt

$$\begin{aligned} \left(\frac{A_k}{A_{k-1}}\right)^k &= \left(1 + \left(\frac{A_k}{A_{k-1}} - 1\right)\right)^k \\ &> 1 + k\left(\frac{A_k}{A_{k-1}} - 1\right) \\ &= \frac{A_{k-1}}{A_{k-1}} + \frac{kA_k}{A_{k-1}} - \frac{kA_{k-1}}{A_{k-1}} \\ &= \frac{kA_k - (k-1)A_{k-1}}{A_{k-1}} \\ &= \frac{a_k}{A_{k-1}}. \end{aligned}$$

Durchmultiplizieren mit A_{k-1}^k ergibt

$$A_k^k \geq a_k A_{k-1}^{k-1},$$

oder äquivalent

$$A_k \geq a_k \frac{1}{k} A_{k-1}^{k-1}.$$

□

Beweis. von Satz 2.1 Vollständige Induktion nach $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$:

IA: $n = 2$: Am Bild gezeigt.

IV: Gelte also für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und alle reellen Zahlen a_1, \dots, a_n mit $a_i \geq 0$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$, dass

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}.$$

IS: $n \mapsto n + 1$. Zu zeigen ist: Für alle reellen Zahlen a_1, \dots, a_{n+1} mit $a_i \geq 0$ für alle $i \in \{1, \dots, n + 1\}$ gilt

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_{n+1}} \leq \frac{a_1 + \dots + a_{n+1}}{n}.$$

Es gilt mit vorigem Lemma

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + \dots + a_{n+1}}{n + 1} &= A_{n+1} \geq a_{n+1}^{\frac{1}{n+1}} A_n^{\frac{n}{n+1}} \dots && \text{(Lemma 2.2)} \\ &= a_{n+1}^{\frac{1}{n+1}} \left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right)^{\frac{n}{n+1}} \\ &\geq \sqrt[n+1]{a_{n+1}} \left(\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \right)^{\frac{n}{n+1}} && \text{(IV)} \\ &= \sqrt[n+1]{a_{n+1}} (a_1 \cdots a_n)^{\frac{n}{n+1} \frac{1}{n}} \\ &= \sqrt[n+1]{a_{n+1}} \sqrt[n+1]{a_1 \cdots a_n} \\ &= \sqrt[n+1]{a_1 \cdots a_n \cdot a_{n+1}}. \end{aligned}$$

□

Beweis. **Zweiter Beweis von Satz 2.1**

Setze $f(x) := e^{x-1} - x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{x-1} - 1 \\ f''(x) &= e^{x-1} > 0. \end{aligned}$$

Es gilt $f'(x) = 0$ genau dann, wenn $x = 1$. Wegen $f''(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ handelt es sich dabei um ein globales Minimum von f . Das heißt es gilt $e^{x-1} - 1 = f(x) \geq f(1) = e^{1-1} - 1 = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Umgestellt ergibt das

$$x \leq e^{x-1},$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Wenden wir diese Ungleichung nun jeweils auf $\frac{a_1}{A_n}, \dots, \frac{a_n}{A_n}$ an, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{A_n} \cdots \frac{a_n}{A_n} &\leq e^{\frac{a_1}{A_n} - 1} \cdots e^{\frac{a_n}{A_n} - 1} \\ &= e^{\frac{a_1 + \dots + a_n}{A_n} - n} \\ &= e^{\left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right) - n} \\ &= e^{n-n} = e^0 = 1. \end{aligned}$$

Also

$$a_1 \cdots a_n \leq A_n^n.$$

Ziehen wir die n -te Wurzel erhalten wir

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq A_n = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}.$$

□

3 Komplexe Zahlen

3.1 Wieso beschäftigen wir uns überhaupt mit komplexen Zahlen?

Eine Motivation für die Konstruktion von 'größeren' Zahlenmengen als die natürlichen Zahlen \mathbb{N}_0 ist das Lösen von Gleichungen:

- (a) \mathbb{Z} : Lösen von $x + 2 = 1$. Keine Lösung in \mathbb{N}_0 . Lösung $x = -1 \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0$
- (b) \mathbb{Q} : Lösen von $2x = 1$. Keine Lösung in \mathbb{Z} . Lösung: $x = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$.
- (c) \mathbb{R} : Lösen von $x^2 = 2$. Keine Lösung in \mathbb{Q} . Lösung: $x = \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
- (d) \mathbb{C} : Lösen von $x^2 + 1 = 0$. Keine Lösung in \mathbb{R} . Lösung: $x = i \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{C}$.

Man kann sogar zeigen (Fundamentalsatz der Algebra): Jedes nicht-konstante Polynom $f(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ (mit $n \in \mathbb{N}$, $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$) hat mindestens eine Nullstelle in \mathbb{C} . Oder anders gesagt: f zerfällt in Linearfaktoren, das heißt

$$f(z) = a_n \prod_{k=1}^n (z - z_k),$$

wobei z_1, \dots, z_n die Nullstellen von f sind. Zwei weitere Beispiele:

- (1) Es gibt Formeln zur Lösung von Gleichungen der Form $x^3 + px + q = 0$ (ähnlich zur Mitternachtsformel für $ax^2 + bx + c = 0$), diese sind bekannt unter dem Namen Cardanische Formeln. Eine dieser Formeln beinhaltet den Term

$$\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Der Term unter der Wurzel kann negativ werden, selbst wenn alle drei Lösungen der Gleichung reell sind (dies kommt bei der Mitternachtsformel nicht vor).

- (2) Berechnung von Integralen über die reelle Achse (Analysis 4 bzw. Funktionentheorie): Betrachte etwa

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^3} dx = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^c \frac{1}{(1+x^2)^3} dx.$$

Wir betrachten dies als komplexes Integral über den 'Weg' $[-c, c]$ und erweitern um einen Halbkreis, um einen geschlossenen 'Weg' zu erhalten. Ein Satz aus der Funktionentheorie (Residuensatz) sagt uns dann, dass das Integral nur von den Polstellen $i, -i$ abhängt und man erhält

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^3} dx = \frac{3\pi}{8}.$$

3.2 Definition der komplexen Zahlen

Zwei Möglichkeiten:

- (a) Wir definieren einfach $i := \sqrt{-1}$. Wenn wir jetzt so tun, als könnten wir mit dieser Zahl rechnen wie gewohnt, dann gilt $i^2 = \sqrt{-1}^2 = -1$. Damit können wir aus algebraischer Sicht Lösungen von diversen Nullstellenproblemen formulieren. Am Beispiel der Vorlesung: Das Polynom $x^2 - 10x + 40$ hat die Nullstellen

$$5 \pm \sqrt{-15} = 5 \pm \sqrt{-1 \cdot 15} = 5 \pm \sqrt{-1} \sqrt{15} = \underbrace{5}_{\in \mathbb{R}} \pm i \underbrace{\sqrt{15}}_{\in \mathbb{R}}.$$

Nachtrag: Die Schreibweise $i := \sqrt{-1}$ liefert eine intuitive Anschauung wie man auf die Zahl i kommt, allerdings sollte man i lieber über $i^2 := -1$ definieren, denn: wenn $i = \sqrt{-1}$, dann gilt

$$-1 = i^2 = \sqrt{-1} \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1.$$

Dies passiert nicht, wenn man stattdessen einfach $i^2 = -1$ fordert. Das legt die folgende Definition nahe: Eine komplexe Zahl ist eine Zahl der Form $z = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und i , die imaginäre Zahl, ist definiert durch $i^2 := -1$. Wir nennen $a =: \operatorname{Re}(z)$ den Realteil von z und $b =: \operatorname{Im}(z)$ den Imaginärteil von z . Dann setzen wir $\mathbb{C} := \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

- (b) In der linearen Algebra habt ihr gelernt, was man in der Mathematik unter einem Körper versteht. Ein Körper ist eine Menge K , versehen mit zwei Abbildungen $\oplus : K \times K \rightarrow K$ und $\odot : K \times K \rightarrow K$, so dass einige 'sinnvolle' Eigenschaften erfüllt sind. Zum Beispiel: Für $a, b, c \in K$ gilt $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$ (diese Eigenschaft heißt Assoziativität). Der Körper ist die mathematische Formalisierung und Verallgemeinerung des Rechensystems, das wir ganz intuitiv schon immer benutzen. Wissen: Auf \mathbb{R} können wir $\oplus = +$ und $\odot = \cdot$ wählen, also die ganz intuitive Addition und Multiplikation verwenden. Dann ist \mathbb{R} , versehen mit $+, \cdot$ ein Körper (man schreibt auch $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ist ein Körper). Eine natürliche Fragestellung in der Mathematik ist dann, ob wir auch auf \mathbb{R}^n (vielleicht sogar für alle $n \in \mathbb{N}$) Verknüpfungen \oplus, \odot definieren können, so dass $(\mathbb{R}^n, \oplus, \odot)$ ein Körper wird. Für den Fall $n = 2$: Seien $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$ beliebig und definiere $\oplus, \odot : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} (a, b) \oplus (c, d) &:= (a + c, b + d) \\ (a, b) \odot (c, d) &:= (ac - bd, ad + cb). \end{aligned}$$

Dann ist $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ ein Körper mit Nullelement $(0, 0)$ und Einselement $1_{\mathbb{R}^2} := (1, 0)$.
Setzen wir $i := (0, 1)$ so ergibt sich

$$i^2 = i \odot i = (0, 1) \odot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1) = (-1, 0) = -1_{\mathbb{R}^2}.$$

(c) Über 2×2 -Matrizen mit reellen Einträgen: Setze

$$1_M := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$i := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$i^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1_M.$$

3.3 Wichtige Begrifflichkeiten und Eigenschaften rund um komplexe Zahlen

Seien $z = a + ib$ und $w = c + id$ komplexe Zahlen.

(a) Addition: Es ist $z + w = (a + ib) + (c + id) = (a + c) + (b + d)i$.

(b) Multiplikation: Es ist

$$zw = (a + ib)(c + id) = ac + ibc + aid + ibid = ac + (bc - ad)i + i^2bd = (ac - bd) + (bc - ad)i.$$

(c) Betrag: Setze $|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$. Dies ist nach dem Satz des Pythagoras der Abstand von z zum Ursprung $(0, 0)$ in der komplexen Zahlenebene.

(d) Komplexe Konjugation: Wir setzen $\bar{z} := a - ib$.

(e) Eulersche Identität: Es gilt

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x).$$

Mit dieser Identität erhalten wir auch

$$e^{i\pi} = \cos(\pi) + i \sin(\pi) = -1,$$

also

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Diese Gleichung ist für Mathematiker sehr schön, denn sie enthält e, π, i als 'wichtigste' Zahlen in der Mathematik und die neutralen Elemente der Multiplikation (die 1) und Addition (die 0). Weiter erhalten wir für jedes $k \in \mathbb{Z}$

$$e^{i2k\pi} = \cos(2k\pi) + i \sin(2k\pi) = 1 + i \cdot 0 = 1.$$

Beispiel 3.3.1. (Quotient komplexer Zahlen)

Betrachte die komplexen Zahlen

$$z := \frac{1+i}{1-i}$$

$$w := \frac{1+4i}{3+i}.$$

Wir wollen $\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z)$ und $\operatorname{Re}(w), \operatorname{Im}(w)$ bestimmen. Dazu erweitern wir mit dem Komplex-Konjugierten des Nenners.

$$z = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+2i+i^2}{1-i^2} = \frac{2i}{2} = i,$$

also $\operatorname{Re}(z) = 0, \operatorname{Im}(z) = 1$. Weiter gilt

$$w = \frac{1+4i}{3+i} = \frac{(1+4i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}$$

$$= \frac{3+12i-i-4i^2}{9-i^2}$$

$$= \frac{7+11i}{10} = \frac{7}{10} + \frac{11}{10}i,$$

also $\operatorname{Re}(w) = \frac{7}{10}$ und $\operatorname{Im}(w) = \frac{11}{10}$.

Beispiel 3.3.2. (Potenzen von Komplexen Zahlen)

Wir möchten i^i berechnen. Dazu betrachten wir

$$i^i = e^{\log(i^i)} = e^{i \log(i)}.$$

Zur Berechnung von $\log(i)$ betrachte $\log(i) = x \Leftrightarrow e^x = i$, da \log Umkehrfunktion von e .

$$i = e^x = e^{-i^2x} = e^{i(-ix)} = e^{iy} \quad (y := -ix)$$

$$= \cos(y) + i \sin(y). \quad (\text{Euler-Identität})$$

Dies ist zum Beispiel für $y = \frac{\pi}{2}$ richtig, denn $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ und $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$. Damit $\frac{\pi}{2} = y = -ix$, also $\log(i) = x = \frac{i\pi}{2}$. Eingesetzt ergibt das

$$i^i = e^{i \log(i)} = e^{i \frac{i\pi}{2}} = e^{-\frac{\pi}{2}} \in \mathbb{R}.$$

Bemerkung 3.3.3.

In Beispiel 3.3.2 wäre auch $y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$ eine sinnvolle Lösung gewesen und damit $\log(i) = i \left(\frac{\pi}{2} + k2\pi \right)$. Die komplexe e -Funktion ist periodisch mit Periode $2\pi i$, d.h. nicht injektiv und wir müssen sie geeignet einschränken um sie umkehren zu können. Oft schränkt man die e -Funktion auf $M := \{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Im}(z) \in (-\pi, \pi]\}$ ein. Damit also $\log(i) = i \left(\frac{\pi}{2} + k2\pi \right) \in M$ gilt, muss $k = 0$ sein, also $y = \frac{\pi}{2}$. Die Umkehrfunktion \log von e auf M nennt man oft den Hauptzweig des Logarithmus.

Bemerkung 3.3.4. (Polarkoordinaten)

Sei $z = a + ib$ eine komplexe Zahl, also $a, b \in \mathbb{R}$. Wir können z durch $r := |z|$, also seine Entfernung vom Ursprung und den Drehwinkel φ eindeutig (bis auf Vielfache von 2π) darstellen, wobei wir (wie in der Mathematik üblich) gegen den Uhrzeigersinn drehen. Es gilt dann $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Im ersten Quadranten, also $a > 0, b > 0$: $\cos(\varphi) = \frac{a}{r}$, sowie $\sin(\varphi) = \frac{b}{r}$, somit $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{b}{a}$. Also $\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$.

Falls $a = 0$ und $b > 0$, also falls wir uns auf der imaginären Achse befinden, gilt offensichtlich $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Im zweiten Quadranten, also $a < 0, b > 0$: Sei in diesem Fall α der Winkel der von der x -Achse und der Strecke vom Ursprung nach z (mit Länge r) eingeschlossen wird. Dann gilt $\varphi = \pi - \alpha$. Dann ist $\cos(\alpha) = \frac{-a}{r}$ und $\sin(\alpha) = \frac{b}{r}$. Also $\tan(\alpha) = -\frac{b}{a}$ und somit $\alpha = \arctan\left(-\frac{b}{a}\right) = -\arctan\left(\frac{b}{a}\right)$. Damit

$$\varphi = \pi - \alpha = \pi - \left(-\arctan\left(\frac{b}{a}\right)\right) = \pi + \arctan\left(\frac{b}{a}\right).$$

Insgesamt erhalten wir

$$\varphi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & a > 0 \\ \frac{\pi}{2} (= \arctan(\infty)) & a = 0 \text{ und } b > 0 \\ -\frac{\pi}{2} (= \arctan(-\infty)) & a = 0 \text{ und } b < 0 \\ \pi + \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & a < 0 \end{cases}.$$

φ heißt Argument von z und wird oft mit $\arg(z)$ bezeichnet. Allgemein kann man zeigen: Für jedes $z = a + bi \in \mathbb{C}$ mit $r := |z|$ gilt immer $\cos(\varphi) = \frac{a}{r}$ und $\sin(\varphi) = \frac{b}{r}$. Im ersten Quadranten ist das klar. Am Beispiel des zweiten Quadranten, also $a < 0, b > 0$: Mit α wie oben gilt $\varphi = \pi - \alpha$. Damit

$$\begin{aligned} \cos(\varphi) &= \cos(\pi - \alpha) \\ &= -\cos(-\alpha) && \text{(Mit Additionstheoremen)} \\ &= -\cos(\alpha) && \text{(cos gerade Funktion)} \\ &= -\frac{-a}{r} \\ &= \frac{a}{r}. \end{aligned}$$

Analog $\sin(\varphi) = \frac{b}{r}$. Daraus erhalten wir.

$$\begin{aligned} z = a + bi &= r \cos(\varphi) + r \sin(\varphi)i \\ &= r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) \\ &= r e^{i\varphi}. \end{aligned}$$

Diese Darstellung ist eindeutig bis auf Vielfache von 2π , das heißt falls $r_1 e^{i\varphi_1} = r_2 e^{i\varphi_2}$, so folgt $r_1 = r_2$ und $\varphi_1 = \varphi_2 + k(2\pi)$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.

Versuchen wir nun, die Zahlen $z = i, w = \frac{7}{10} + \frac{11}{10}i$ aus vorigem Beispiel in Polarkoordinaten zu schreiben. Klar: $z = i = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$. Es gilt weiter $|w| = \sqrt{\frac{7^2+11^2}{10^2}} = \frac{\sqrt{170}}{10}$, und wegen $a > 0$ ergibt sich

$$\arg(w) = \arctan\left(\frac{\frac{11}{10}}{\frac{7}{10}}\right) = \arctan\left(\frac{11}{7}\right) = 1.00406711.$$

Also $w = \frac{\sqrt{170}}{10} \cdot e^{i \cdot 1.00406711}$.

Bemerkung 3.3.5.

Mit den Polarkoordinaten kann man i^i etwas eleganter berechnen:

$$i^i = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^i = e^{i^2\frac{\pi}{2}} = e^{-\frac{\pi}{2}}.$$

Beispiel 3.3.6.

Wir möchten alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ von $z^5 = 2$ bestimmen. Hier erweisen sich die Polarkoordinaten als besonders sinnvoll: Wir schreiben $z = re^{i\varphi}$ und $2 = 2 \cdot e^{i \cdot 0}$. Dann gilt $z^5 = 2$ genau dann, wenn

$$r^5 e^{i(5\varphi)} = (re^{i\varphi})^5 = 2 = 2 \cdot e^{i \cdot 0}.$$

Aus der Eindeutigkeit der Polarkoordinatendarstellung folgt $r^5 = 2$ und $5\varphi = 0 + k2\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Das heißt $r = 2^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{2}$ und

$$\varphi = \frac{2k\pi}{5} \in \left\{ \frac{-4\pi}{5}, \frac{-2\pi}{5}, 0, \frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \frac{6\pi}{5}, \frac{8\pi}{5}, \frac{10\pi}{5} = 2\pi, \dots \right\} =: M.$$

Nun gilt aber für jedes $k \in \mathbb{Z}$

$$e^{i\frac{2k\pi}{5}} = e^{i(\frac{2k\pi}{5} + 2\pi)} = e^{i\frac{2k\pi + 5 \cdot 2\pi}{5}} = e^{i\frac{(k+5)2\pi}{5}},$$

das heißt wir haben genau 5 voneinander verschiedene Lösungen $\sqrt[5]{2}e^{i\varphi}$ mit $\varphi \in M$, nämlich

$$\sqrt[5]{2}e^{i\frac{2\pi k}{5}}, \sqrt[5]{2}e^{i\frac{2\pi(k+1)}{5}}, \sqrt[5]{2}e^{i\frac{2\pi(k+2)}{5}}, \sqrt[5]{2}e^{i\frac{2\pi(k+3)}{5}}, \sqrt[5]{2}e^{i\frac{2\pi(k+4)}{5}},$$

für ein beliebiges aber festes $k \in \mathbb{Z}$. Exemplarisch für $k = 0$ ergibt das

$$\sqrt[5]{2}, \sqrt[5]{2}e^{i\frac{2\pi}{5}}, \sqrt[5]{2}e^{i\frac{4\pi}{5}}, \sqrt[5]{2}e^{i\frac{6\pi}{5}}, \sqrt[5]{2}e^{i\frac{8\pi}{5}}.$$

4 Folgen

Definition 4.1. (Folge)

Wir nennen eine Abbildung $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ (oder $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$) eine Folge. Für $n \in \mathbb{N}$ schreiben wir $a_n := a(n)$ und schreiben für die Abbildung a einfach $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Definition 4.2. (Folgenkonvergenz)

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge und $a \in \mathbb{R}$. Wir sagen, die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen a , falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon.$$

In Worten: Zu jeder (noch so kleinen Zahl) $\varepsilon > 0$ können wir ein (noch so großes) $n_0 \in \mathbb{N}$ finden, so dass ab diesem n_0 alle Folgenglieder a_n höchstens ε von a entfernt liegen. Bzw. etwas informeller: Die Folgenglieder a_1, a_2, \dots kommen a irgendwann ($\exists n_0 \in \mathbb{N}$) beliebig nahe ($\forall \varepsilon > 0$) und bleiben dort auch ($\forall n \geq n_0$). Bild! In diesem Fall schreiben wir $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ oder $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a$.

Anhand von folgendem Beispiel sehen wir, wie wir eine Aufgabe zur Folgenkonvergenz formal sauber aufschreiben können.

Beispiel 4.3.

Sei $c \in \mathbb{R}$ beliebig und $a_n := \frac{c}{n}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Konvergiert $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und wenn ja wogegen?

Behauptung 4.4.

Es gilt $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $n_0 > \frac{|c|}{\varepsilon}$. Dann gilt

$$|a_n - 0| = |a_n| = \left| \frac{c}{n} \right| = \frac{|c|}{n} \leq \frac{|c|}{n_0} < \frac{|c|}{\frac{|c|}{\varepsilon}} = \varepsilon.$$

□

Bemerkung 4.5.

Sei $c := 1000000$. Wollen wir so ein n_0 also beispielsweise für $\varepsilon = \frac{1}{1000}$ finden, so ergibt sich aus dem Beweis die Bedingung $n_0 > \frac{|c|}{\varepsilon} = \frac{1000000}{\frac{1}{1000}} = 1000000000$. Also kann man zb. $n_0 := 1000000001$ setzen, aber jedes größere n_0 wäre auch sinnvoll, man kann also auch $n_0 := 1000000002, 1000000003, \dots$ wählen.

Beispiel 4.6. (Cesaro-Summe)

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen.

(a) Konvergiert $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen ein $a \in \mathbb{R}$, so gilt auch

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a.$$

(b) Im Allgemeinen folgt aus der Konvergenz von $\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \right)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht die Konvergenz von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Bemerkung 4.7.

Man kann die Aufgabenstellung in Beispiel 4.6 auch wie folgt formulieren: Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Dann gilt

$$(a) \left(\exists a \in \mathbb{R} : a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a \right) \Rightarrow \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a \right).$$

(b) Seien A und B Aussagen: Dann gilt $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((\neg A) \vee B)$. Das heißt $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg((\neg A) \vee B) = A \wedge (\neg B)$. Wir wollen zeigen, dass $A := \exists a \in \mathbb{R} : \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a$ nicht impliziert, dass $B := a_n$ konvergiert. Das heißt wir können zeigen: $\exists (a_n)_{n \in \mathbb{N}} : A \wedge \neg B$. Also $\exists a \in \mathbb{R} : \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a$ und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ divergiert.

Beweis. (a) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Setze $\varepsilon' := \frac{\varepsilon}{2} > 0$. Dann sagt uns die Definition für $a_n \rightarrow a$ mit $n \rightarrow \infty$, dass

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 : |a_n - a| < \varepsilon' = \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2} \quad (1)$$

Setze nun $c := \sum_{i=1}^{n_0} a_i \in \mathbb{R}$. Dann gilt mit Beispiel 4.3 und der darauffolgenden Behauptung (wegen $c > 0$), dass

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} \forall n > n_2 : \frac{c}{n} = \left| \frac{c}{n} \right| < \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2)$$

Sei nun $n_2 > \max\{n_0, n_1\}$. Dann gilt $n_2 > n_0$ und $n_2 > n_1$ und somit für alle $n > n_2$

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i - a \right| &= \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i - n \frac{1}{n} a \right| \\
 &= \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a \right| \\
 &= \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (a_i - a) \right| \\
 &= \left| \frac{1}{n} \right| \cdot \left| \sum_{i=1}^n (a_i - a) \right| \\
 &= \frac{1}{n} \left| \sum_{i=1}^n (a_i - a) \right| \\
 &\leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |a_i - a| && \text{(Dreiecksungleichung)} \\
 &= \frac{1}{n} \underbrace{\sum_{i=1}^{n_0} |a_i - a|}_{=c} + \frac{1}{n} \sum_{i=n_0+1}^n |a_i - a| \\
 &= \frac{c}{n} + \frac{1}{n} \sum_{i=n_0+1}^n |a_i - a| \\
 &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n} \sum_{i=n_0+1}^n |a_i - a| && (2) \\
 &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n} \sum_{i=n_0+1}^n \frac{\varepsilon}{2} && (1) \\
 &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon}{2} \\
 &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n} \cdot n \cdot \frac{\varepsilon}{2} \\
 &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
 &= \varepsilon.
 \end{aligned}$$

(b) Es genügt, eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zu finden, so dass $\left(\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{\infty} a_n\right)$ konvergiert, aber $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ divergiert. Welche Folgen kennen wir, die divergieren?

(a) Folgen, die gegen unendlich divergieren: Naiv: $a_n = n, \forall n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n a_i &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n i \\
 &= \frac{1}{n} \frac{n(n+1)}{2} && \text{(Kleiner Gauß)} \\
 &= \frac{n+1}{2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty.
 \end{aligned}$$

Klappt nicht...

- (b) Folgen die mehrere Häufungspunkte haben. Naiv: $a_n = (-1)^n, \forall n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i = \begin{cases} 0 & n \text{ gerade} \\ \frac{-1}{n} & n \text{ ungerade} \end{cases} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Super! Diese Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ leistet also das Gewünschte. □

Beispiel 4.8. (Quotienten von Polynomen in n)

Konvergiert die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiert durch

$$a_n := \frac{10n^5 + 2n^4 - 1000n + 10}{100n^5 + 3n^3 - 10n^2 + 1}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$? Ja, der Grenzwert ist $a := \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$. Idee: Erweitere a_n mit der größten Potenz von n die in a_n vorkommt, d.h.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{10n^5 + 2n^4 - 1000n + 10}{100n^5 + 3n^3 - 10n^2 + 1} \\ &= \frac{\frac{1}{n^5} 10n^5 + 2n^4 - 1000n + 10}{\frac{1}{n^5} 100n^5 + 3n^3 - 10n^2 + 1} \\ &= \frac{10 + \frac{2}{n} - \frac{1000}{n^4} + \frac{10}{n^5}}{100 + \frac{3}{n^2} - \frac{10}{n^3} + \frac{1}{n^5}} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{10 + 0 + 0 + 0}{100 + 0 + 0 + 0} = \frac{1}{10}. \end{aligned}$$

Hausaufgabe 4.9.

Betrachte die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiert durch

$$a_n := \begin{cases} 1 & \exists k \in \mathbb{N} : n = 2^k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Konvergiert $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und falls ja, wogegen?

4.1 Einschub: Äquivalenzrelationen und Wohldefiniertheit

Definition 4.1.1.

Sei M eine Menge. Eine Äquivalenzrelation auf einer Menge M ist eine Teilmenge $\sim \subseteq M \times M$ mit den folgenden Eigenschaften:

- (i) (Reflexivität) $\forall a \in M : (a, a) \in \sim$.
- (ii) (Symmetrie) $\forall a, b \in M : ((a, b) \in \sim) \Rightarrow ((b, a) \in \sim)$
- (iii) (Transitivität) $\forall a, b, c \in M : ((a, b) \in \sim) \wedge ((b, c) \in \sim) \Rightarrow ((a, c) \in \sim)$.

Statt $(a, b) \in \sim$ wird oft einfach $a \sim b$ geschrieben. Dies führt zu folgender alternativen, aber äquivalenten Formulierung:

- (i) (Reflexivität) $\forall a \in M : a \sim a$.
- (ii) (Symmetrie) $\forall a, b \in M : a \sim b \Rightarrow b \sim a$
- (iii) (Transitivität) $\forall a, b, c \in M : (a \sim b \wedge b \sim c) \Rightarrow a \sim c$.

Wir schreiben für ein Element $x \in M$

$$\bar{x} := \{y \in M \mid y \sim x\}.$$

\bar{x} heißt die Äquivalenzklasse von x . Falls $x \sim y$, so gilt $\bar{x} = \bar{y}$ (Übung).

Bemerkung 4.1.2.

Eine Äquivalenzrelation kann man sich als eine etwas schwächere Version von Gleichheit vorstellen. Wir versuchen in einer Äquivalenzrelation Objekte ($x \in M$) bezüglich einer gewissen Eigenschaft zu kategorisieren (in die Äquivalenzklassen \bar{x}).

Beispiel: Sei M die Menge aller Autos. Für zwei Autos $A, B \in M$ schreiben wir $A \sim B$ (bzw. $(A, B) \in \sim$), falls sie vom selben Hersteller sind. Dann gilt etwa E-Klasse \sim V-Klasse (beide vom Autohersteller Mercedes), aber E-Klasse \neq V-Klasse. Die Äquivalenzklassen sind dann genau alle Autos vom selben Hersteller.

Beispiel 4.1.3.

Sei $M := \mathbb{Z}$. Wir definieren für $a, b \in \mathbb{Z}$

$$a \sim b :\Leftrightarrow a - b \text{ ist durch } 2 \text{ teilbar.}$$

Wir zeigen, dass \sim eine Äquivalenzrelation ist.

- (i) Für jedes $a \in \mathbb{Z}$ ist $a \sim a$, denn $a - a = 0$ ist durch 2 teilbar.
- (ii) Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ beliebig und gelte $a \sim b$, d.h. $\exists k \in \mathbb{Z} : a - b = 2k$. Dann ist $b - a = -(a - b) = -2k = 2(-k)$, also ist auch $b - a$ durch 2 teilbar. Daraus folgt $b \sim a$.
- (iii) Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$ mit $a \sim b$ und $b \sim c$, d.h. es gibt $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ mit $a - b = 2k_1$ und $b - c = 2k_2$, Dann gilt

$$a - c = (a - b) + (b - c) = 2k_1 + 2k_2 = 2(k_1 + k_2),$$

das heißt $a - c$ ist durch 2 teilbar, und somit $a \sim c$.

Die Äquivalenzklassen sind genau $\bar{0}$, die Menge aller geraden ganzen Zahlen, und $\bar{1}$, die Menge aller ungeraden ganzen Zahlen

Definition 4.1.4. (Wohldefiniertheit)

Seien M, N Mengen und $f : M \rightarrow N$ eine Abbildung. f ist wohldefiniert, wenn f tatsächlich der Definition einer Abbildung entspricht, d.h.

- (a) Für jedes $x \in M$ gilt $f(x) \in N$.
- (b) Für alle $x, y \in M$ gilt $(x = y) \Rightarrow (f(x) = f(y))$.

Teil (b) kann problematisch werden, falls die Elemente von M Äquivalenzklassen sind, da in diesem Fall oft die Abbildung f durch einen Vertreter der Äquivalenzklasse definiert wird. Mehr dazu später.

Beispiel 4.1.5. (Gegenbeispiele für Wohldefiniertheit)

- (a) $f : \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{Q}: f(0) := 0, f(1) := \pi. \pi \notin \mathbb{Q}$. Der Wert $f(1) = \pi$ sollte per Definition von f in \mathbb{Q} sein, er ist aber in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
- (b) $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}$ mit $f(a/b) := a$ für alle $(a/b) \in \mathbb{Q}$. Es gilt $f(1/2) = 1$ aber $f(2/4) = 2$ und $2/4 = 1/2$, also hat $1/2$ zwei verschiedene Bilder unter f .

Beispiel 4.1.6.

In der Vorlesung haben wir die Addition von reellen Zahlen $\overline{(s_n)}, \overline{(v_n)}$ kennengelernt:

$$\overline{(s_n)} + \overline{(v_n)} := \overline{(s_n + v_n)}.$$

Dies kann man als Abbildung $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ auffassen.

$$\overline{(s_n)} + \overline{(v_n)} := f(\overline{(s_n)}, \overline{(v_n)}) := \overline{(s_n + v_n)}.$$

In der Abbildungsvorschrift tauchen die Vertreter $(s_n), (v_n)$ der Äquivalenzklassen $\overline{(s_n)}, \overline{(v_n)}$ auf, die Abbildung könnte also für die Äquivalenzklasse $\overline{(s_n)}$ verschiedene Bilder haben, je nachdem welchen Vertreter der Äquivalenzklasse wir wählen. Um Wohldefiniertheit zu zeigen, müssen wir also zeigen:

- (a) $\overline{(s_n + v_n)} \in \mathbb{R}$, d.h. $s_n + v_n$ ist rationale Cauchy-Folge (d.h. der Wert $\overline{(s_n)} + \overline{(v_n)}$ ist tatsächlich in \mathbb{R} , was wir auch haben wollen).
- (b) Sind $(s'_n), (v'_n)$ rationale Cauchy-Folgen mit $\overline{(s_n)} \sim \overline{(s'_n)}$ und $\overline{(v_n)} \sim \overline{(v'_n)}$, so folgt $\overline{(s_n + v_n)} = \overline{(s'_n + v'_n)}$ (d.h. die Addition von $\overline{(s_n)}$ und $\overline{(v_n)}$ ergibt einen eindeutigen Wert).

Zu (b) sagt man auch, dass diese Definition unabhängig von den Vertretern $(s_n), (v_n)$ der Äquivalenzklassen $\overline{(s_n)}, \overline{(v_n)}$ ist.

Beispiel 4.1.7. (Wohldefiniertheit des Produkts reeller Zahlen)

Dieses Beispiel wird in den Übungen auftauchen. Wir sollen zeigen, dass das Produkt reeller Zahlen wohldefiniert ist, das heißt, dass

$$\overline{(s_n)} \cdot \overline{(v_n)} := \overline{(s_n \cdot v_n)}$$

wohldefiniert ist, wobei $(s_n), (v_n)$ wieder beliebige rationale Cauchy-Folgen sind. Hierfür müssen wir zeigen:

- (a) $(s_n \cdot v_n)$ ist eine rationale Cauchy-Folge. Damit ist $\overline{(s_n \cdot v_n)} \in \mathbb{R}$.
- (b) Sind $(s'_n), (v'_n)$ rationale Cauchy-Folgen mit $\overline{(s_n)} \sim \overline{(s'_n)}$ und $\overline{(v_n)} \sim \overline{(v'_n)}$, so folgt $\overline{(s_n \cdot v_n)} \sim \overline{(s'_n \cdot v'_n)}$ (und damit $\overline{(s_n \cdot v_n)} = \overline{(s'_n \cdot v'_n)}$).

4.2 Monotoniekriterium

In der Vorlesung haben wir ein wichtiges Kriterium kennengelernt, mit dem wir prüfen können, ob eine Folge konvergiert, ohne den Grenzwert kennen zu müssen.

Satz 4.2.1. (*Monotoniekriterium*)

Jede monoton wachsende und beschränkte reelle Folge konvergiert in \mathbb{R} . Oder anders formuliert: Sei $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Ist $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt und monoton wachsend, so gibt es ein $s \in \mathbb{R}$ mit $s_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} s$.

Beispiel 4.2.2. (Anwendung des Monotoniekriteriums, Heron-Verfahren)

Seien $a, c \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ und $c > 0$ beliebig. Definiere $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ rekursiv durch $a_0 := c$ und

$$a_{n+1} := \frac{1}{2} \cdot \left(a_n + \frac{a}{a_n} \right), \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Wir wollen prüfen, ob $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert.

Zunächst überlegen wir uns, wie der Grenzwert von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aussieht. Angenommen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ konvergiert gegen $b \in \mathbb{R}$. Dann muss gelten

$$b = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \left(a_n + \frac{a}{a_n} \right) = \frac{1}{2} \left(b + \frac{a}{b} \right).$$

Stellen wir dies nach b um, so ergibt sich

$$b^2 = a,$$

also $b \in \{-\sqrt{a}, \sqrt{a}\}$. Nach Definition von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist aber klar, dass $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt (streng genommen beweist man das mit Induktion, Übung). Daher würde $b = \sqrt{a}$ folgen. Wir haben jetzt also geklärt, dass falls $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ überhaupt konvergiert, dann muss $b = \sqrt{a}$ der Grenzwert sein. Wenn man konkrete Werte für c, a wählt und die ersten Folgenglieder ausrechnet, kann man einen Hinweis darauf bekommen, ob die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fallend oder wachsend sein könnte. Setze $a = 4$ und $c = 1$. Dann gilt

$$a_1 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{4}{1} \right) = \frac{5}{2}$$

$$a_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{5}{2} + \frac{4}{\frac{5}{2}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{25}{10} + \frac{16}{10} \right) = \frac{41}{20} < \frac{50}{20} = \frac{5}{2} = a_1$$

$$a_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{41}{20} + \frac{4}{\frac{41}{20}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{41}{20} + \frac{80}{41} \right) = \frac{1681 + 1600}{1640} = 2.0006097561 < 2.05 = \frac{41}{20} = a_2.$$

Dies legt nahe, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fallend und durch \sqrt{a} nach unten beschränkt sein könnte. Versuchen wir also zu zeigen, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fallend ist, d.h.

$$a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Das ist äquivalent zu

$$a_{n+1} - a_n \leq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Es gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{1}{2} \left(a_n - \frac{a}{a_n} \right) - a_n \\ &= \frac{a}{2a_n} - \frac{a_n}{2} \\ &= \frac{a - a_n^2}{2a_n} \leq 0. \end{aligned}$$

Für den letzten Schritt müssen wir noch $a - a_n^2 \leq 0$ zeigen, was erfüllt sein sollte, da wir weiter oben vermutet haben, dass $a_n \geq \sqrt{a}$. Das bedeutet $a_n^2 \geq a$ und somit $a_n^2 - a \geq 0$ und $a - a_n^2 \leq 0$. Es gilt

$$\begin{aligned} a_n^2 - a &= \left(\frac{1}{2} \left(a_{n-1} + \frac{a}{a_{n-1}} \right) \right)^2 - a \\ &= \frac{1}{4} \left(a_{n-1} + \frac{a}{a_{n-1}} \right)^2 - a \\ &= \frac{1}{4} a_{n-1}^2 + \frac{1}{2} a + \frac{1}{4} \frac{a^2}{a_{n-1}^2} - a \\ &= \frac{1}{4} a_{n-1}^2 - \frac{1}{2} a + \frac{1}{4} \frac{a^2}{a_{n-1}^2} \\ &= \frac{1}{4} \left(a_{n-1} - \frac{a}{a_{n-1}} \right)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Also folgt $a_n^2 \geq a$ (und somit wegen $a_n \geq 0$ auch $a_n \geq \sqrt{a}$) für alle $n \in \mathbb{N}$. Zusammen ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fallend und beschränkt (nach unten durch 0 bzw. schärfer durch \sqrt{a} und nach oben durch a_1 , da monoton fallend). Damit konvergiert $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen eine reelle Zahl $b \in \mathbb{R}$. Weiter oben haben wir schon geklärt, dass dann $b = \sqrt{a}$ gelten muss.

Hausaufgabe 4.2.3.

Schreibt obigen informellen Beweis von Beispiel 4.2.2 mathematisch präzise auf. Hier der Beweis:

Beweis.

- (1) Wir zeigen zunächst, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch \sqrt{a} nach unten beschränkt ist,

d.h. $a_n \geq \sqrt{a}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dazu genügt es zu zeigen: $a_n^2 - a \geq 0$. Es gilt

$$\begin{aligned} a_n^2 - a &= \left(\frac{1}{2} \left(a_{n-1} + \frac{a}{a_{n-1}} \right) \right)^2 - a \\ &= \frac{1}{4} \left(a_{n-1} + \frac{a}{a_{n-1}} \right)^2 - a \\ &= \frac{1}{4} a_{n-1}^2 + \frac{1}{2} a + \frac{1}{4} \frac{a^2}{a_{n-1}^2} - a \\ &= \frac{1}{4} a_{n-1}^2 - \frac{1}{2} a + \frac{1}{4} \frac{a^2}{a_{n-1}^2} \\ &= \frac{1}{4} \left(a_{n-1} - \frac{a}{a_{n-1}} \right)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Also folgt $a_n^2 - a \geq 0$ und somit $a_n^2 \geq a$ und wegen $a_n \geq 0$ auch $a_n \geq \sqrt{a}$.

(2) Wir zeigen, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fallend ist, d.h.

$$a_{n+1} - a_n \leq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Es gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{1}{2} \left(a_n - \frac{a}{a_n} \right) - a_n \\ &= \frac{a}{2a_n} - \frac{a_n}{2} \\ &= \frac{a - a_n^2}{2a_n} \leq 0. \end{aligned} \quad (\text{nach (1) ist } a - a_n^2 \leq 0)$$

(3) Nach (2) ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fallend. Weiter ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt, denn es gilt $a_n \geq \sqrt{a}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a_n \leq a_1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, da $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fallend ist. Zusammen ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fallend und beschränkt, d.h. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert nach dem Monotoniekriterium Satz 4.2.1. Sei $b \in \mathbb{R}$ der Grenzwert von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Dann gilt

$$b = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \left(a_n + \frac{a}{a_n} \right) = \frac{1}{2} \left(b + \frac{a}{b} \right).$$

Dies ist äquivalent zu

$$b^2 = a,$$

d.h. $b \in \{-\sqrt{a}, \sqrt{a}\}$. Wegen $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ muss $b = \sqrt{a}$ gelten, zusammen erhalten wir also

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt{a}.$$

□

4.3 Häufungspunkte

Definition 4.3.1.

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine Abbildung. $(a_{\sigma(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ heißt Teilfolge von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, falls $\sigma(n) < \sigma(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Beispiel 4.3.2. (Beispiele und Gegenbeispiele für Teilfolgen)

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen.

(a) Sei $\sigma(n) := 2n$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$(a_{\sigma(n)})_{n \in \mathbb{N}} = (a_2, a_4, a_6, a_8, \dots).$$

Das ist eine Teilfolge von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(b) Sei $\sigma(n) := 2n - 1$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$(a_{\sigma(n)})_{n \in \mathbb{N}} = (a_1, a_3, a_5, a_7, \dots).$$

Das ist eine Teilfolge von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(c) Sei $\sigma(n) := 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$(a_{\sigma(n)})_{n \in \mathbb{N}} = (a_1, a_1, a_1, a_1, \dots).$$

Das ist keine Teilfolge von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Satz 4.3.3.

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen, die gegen ein $a \in \mathbb{R}$ konvergiert. Dann konvergieren auch alle Teilfolgen von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen a .

Beweis. Sei $(a_{\sigma(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Teilfolge, d.h. $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ist eine Abbildung mit $\sigma(1) < \sigma(2) < \dots$ (d.h. insbesondere $\sigma(n) \rightarrow \infty$ mit $n \rightarrow \infty$). Wir müssen zeigen:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_1 : |a_{\sigma(n)} - a| < \varepsilon.$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Wähle nun $n_1 \in \mathbb{N}$ so, dass $\sigma(n_1) \geq n_0$. Dann gilt für alle $n \geq n_1$ insbesondere, dass $\sigma(n) \geq n_0$ (da $\sigma(n) > \sigma(n-1) > \dots > \sigma(n_1) \geq n_0$) und somit

$$|a_{\sigma(n)} - a| < \varepsilon.$$

□

Definition 4.3.4.

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, wenn es eine Teilfolge $(a_{\sigma(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ gibt, die gegen a konvergiert.

Wir betrachten nochmals

Hausaufgabe 4.10.

Betrachte die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiert durch

$$a_n := \begin{cases} 1 & \exists k \in \mathbb{N} : n = 2^k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Konvergiert $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und falls ja, wogegen?

Lösung: Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert nicht. Zwei Möglichkeiten:

1. Wähle die Teilfolgen $(a_{\sigma_1(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ und $(a_{\sigma_2(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ wobei

$$\begin{aligned} \sigma_1(n) &:= 2^n \\ \sigma_2(n) &:= 2^n + 1. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} a_{\sigma_1(n)} &= a_{2^n} = 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \\ a_{\sigma_2(n)} &= a_{2^n + 1} = 0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Wir haben also zwei Teilfolgen von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gefunden, die jeweils gegen 0, bzw. 1 konvergieren. Damit hat die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zwei Häufungspunkte und kann nach Satz 4.3.3 nicht konvergieren. Hier haben wir implizit verwendet, dass eine Folge genau dann konvergiert, wenn sie beschränkt ist und genau einen Häufungspunkt besitzt.

2. Sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir zeigen, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht gegen a konvergiert. Wir unterscheiden zwei Fälle

- (1) $a = 0$: Wir müssen zeigen:

$$\exists \varepsilon > 0 \forall n_0 \in \mathbb{N} \exists n \geq n_0 : |a_n - 0| \geq \varepsilon.$$

Wähle $\varepsilon := 1$ und sei $n_0 \in \mathbb{N}$ beliebig. Wegen $2^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$, gibt es ein $n \geq n_0$ mit $n = 2^k$. Damit gilt

$$|a_n - 0| = |a_n| = |a_{2^k}| = 1 \geq 1 = \varepsilon.$$

- (2) $a \neq 0$: Wir müssen zeigen:

$$\exists \varepsilon > 0 \forall n_0 \in \mathbb{N} \exists n \geq n_0 : |a_n - a| \geq \varepsilon.$$

Wähle $\varepsilon := |a| > 0$ (da $a \neq 0$). Sei $n_0 \in \mathbb{N}$ beliebig und wähle $n \geq n_0$ so, dass $n \neq 2^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dies ist möglich, denn falls $n_0 = 2^k$ für ein $k \in \mathbb{N}$ so ist $n := n_0 + 1 \neq 2^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und falls $n_0 \neq 2^k$, so wähle $n := n_0$. Damit gilt also

$$|a_n - a| = |0 - a| = |a| \geq |a| = \varepsilon.$$

Satz 4.3.5. (Satz von Bolzano-Weierstraß)

Jede beschränkte Folge reeller Zahlen hat einen Häufungspunkt.

Beispiel 4.3.6.

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiert durch

$$a_n := (-1)^n \left(2 - \frac{1}{n}\right).$$

Wir wollen alle Häufungspunkte, \limsup , \liminf , \sup und \inf dieser Folge bestimmen. Dazu bemerken wir zunächst, dass

$$\begin{aligned} a_{2n} &= (-1)^{2n} \left(2 - \frac{1}{2n}\right) = 2 - \frac{1}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2 \\ a_{2n+1} &= (-1)^{2n+1} \left(2 - \frac{1}{2n+1}\right) = -2 + \frac{1}{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -2. \end{aligned}$$

Also haben wir schon mal die zwei Häufungspunkte -2 und 2 gefunden. Wir vermuten, dass das alle Häufungspunkte sind. Formal zeigt man das wie folgt. Wir unterscheiden für eine beliebige Teilfolge $(a_{\sigma(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ die folgenden Fälle:

- (1) : $\exists n_0 \in \mathbb{N} : (\forall n \geq n_0 : \sigma(n) \text{ gerade}) \vee (\forall n \geq n_0 : \sigma(n) \text{ ungerade})$. In Worten: Es gibt einen Index n_0 , so dass ab diesem Index entweder alle $\sigma(n)$ gerade Zahlen sind, oder alle $\sigma(n)$ ungerade Zahlen sind.

Gelte ohne Einschränkung $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : \sigma(n) \text{ gerade}$. Dann gilt $a_{\sigma(n)} \xrightarrow{2}$ (Im anderen Fall ergibt sich $a_{\sigma(n)} \xrightarrow{-2}$). Wir erhalten für solche Teilfolgen also keine weiteren Häufungspunkte.

- (2) : $\forall n_0 \in \mathbb{N} : (\exists n \geq n_0 : \sigma(n) \text{ gerade}) \wedge (\exists n \geq n_0 : \sigma(n) \text{ ungerade})$. In Worten: Es gibt in dieser Teilfolge unendlich viele $\sigma(n)$, die ungerade Zahlen sind, und unendlich viele $\sigma(n)$, die gerade Zahlen sind. In diesem Fall konvergiert die Folge nicht, da sie zwei Häufungspunkte hat. Also erhalten wir in diesem Fall auch keine weiteren Häufungspunkte

Die Fälle (1) und (2) sind die einzigen beiden Fälle, die passieren können (Fall (2) ist die Negation von Fall (1)). Also gibt es keine weiteren Häufungspunkte neben -2 und 2 . Hier haben wir also $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -2$ und $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$. Weiter gilt sogar $\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n = 2$ und $\inf_{n \in \mathbb{N}} a_n = -2$.

Beispiel 4.3.7. (Aufgabe 32 auf Blatt 6)

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte reelle Folge und $a \in \mathbb{R}$ ihr einziger Häufungspunkt. Dann gilt $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$.

Beweis. Idee: Beweis durch Widerspruch. Wir nehmen also an, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht gegen a konvergiert. Dazu müssen wir die Definition von $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ negieren. Die Definition ist

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon.$$

Die Negation lautet

$$\exists \varepsilon > 0 \forall n_0 \in \mathbb{N} \exists n \geq n_0 : |a_n - a| \geq \varepsilon.$$

In Worten: Es gibt ein $\varepsilon > 0$ sodass wir für jeden Index $n_0 \in \mathbb{N}$ einen größeren Index $n = n(n_0) \in \mathbb{N}$ finden können, so dass $|a_n - a| \geq \varepsilon$. Konstruiere daraus eine Teilfolge $(a_{\sigma(n)})_{n \in \mathbb{N}}$, für die $|a_{\sigma(n)} - a| \geq \varepsilon$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt. Hierbei ist Vorsicht geboten, da man sicherstellen muss, dass $\sigma(1) < \sigma(2) < \dots$. $(a_{\sigma(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ ist als Teilfolge von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt, verwende also den Satz von Bolzano-Weierstraß auf diese Teilfolge und verwende die Voraussetzung, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ genau einen Häufungspunkt hat. \square

4.4 Reihen

Intuitiv gesprochen, beschreiben Reihen unendliche Summen reeller Zahlen

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

Definition 4.4.1. (Reihe)

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Definiere

$$s_n := \sum_{j=1}^n a_j.$$

Dann heißt $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Partialsommenfolge von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Falls $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen ein $s \in \mathbb{R}$ konvergiert, so schreiben wir

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j := s$$

und nennen s Reihe über $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Eine Reihe ist also einfach nur der Grenzwert einer speziellen Folge.

Bemerkung 4.4.2.

Oft wird $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ auch als Schreibweise für die Partialsommenfolge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ verwendet. Man sagt dann $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ konvergiert (bzw. divergiert), falls $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ im Folgen-Sinne konvergiert (bzw. divergiert). Falls $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ gegen $s \in \mathbb{R}$ konvergiert, so nennen wir s den Wert der Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$.

Beispiel 4.4.3. (a) Geometrische Reihe mit $q \in \mathbb{R}$

$$\sum_{j=0}^{\infty} q^j.$$

Konvergiert, falls $|q| < 1$, gegen $\frac{1}{1-q}$ und divergiert, falls $|q| \geq 1$. Hier 'startet' die Reihe nicht bei 1, sondern bei 0. Ist das ein Problem?

Nein, betrachte einfach die Folge $a_n := q^{n-1}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und verwende einen Indexshift:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} a_j &= \sum_{j=1}^{\infty} q^{j-1} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} q^j \end{aligned} \quad (\text{Beispiel 1.1.4})$$

(b) Harmomische Reihe:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}.$$

Divergiert.

Bemerkung 4.4.4. ('Anwendung') In der Stochastik beschäftigt man sich oft mit Zufallsexperimenten, deren mögliche Ergebnisse alle natürlichen Zahlen sind (z.B. Anzahl der Zerfälle einer radioaktiven Probe aus Uran pro Sekunde (oder Minute, Stunde,...)). Sei p_i die Wahrscheinlichkeit, für die natürliche Zahl $i \in \mathbb{N}$. Dann sollte $p_i \in [0, 1]$ und

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1.$$

gelten, d.h. die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} p_i$ konvergiert und hat den Wert 1. Oft muss man selbst ein sog. Wahrscheinlichkeitsmaß definieren und zeigen, dass sich alle Wahrscheinlichkeiten p_i tatsächlich zu 1 aufsummieren.

Beispiel 4.4.5.

Sei $a_n := \frac{1}{4n^2-1}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$s_n = \sum_{j=1}^n \frac{1}{4j^2-1}.$$

Wegen

$$\begin{aligned} s_1 &= \sum_{j=1}^1 \frac{1}{4j^2-1} = \frac{1}{3} \\ s_2 &= \sum_{j=1}^2 \frac{1}{4j^2-1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} = \frac{5+1}{15} = \frac{6}{15} \\ s_3 &= \frac{3}{7} \\ s_4 &= \frac{4}{9} \end{aligned}$$

vermuten wir, dass $s_n = \frac{n}{2n+1}$. Dies können wir mit Induktion verifizieren. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} a_j &= \lim_{n \rightarrow \infty} s_n && \text{(Definition)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2 + \frac{1}{n}} \\ &= \frac{1}{2+0} && \text{(Grenzwertsätze)} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Bemerkung 4.4.6. Im Allgemeinen ist es leider schwierig, für eine gegebene Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen, die Partialsummenfolge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ explizit auszurechnen, bzw. deren Konvergenz zu zeigen oder den Grenzwert zu bestimmen. Betrachte etwa

$$s_n = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2}.$$

Deswegen sucht man Kriterien, die die Konvergenz einer Reihe (also die Konvergenz von Partialsummenfolgen $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$) liefern.

Satz 4.4.7.

Falls die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ konvergiert, dann gilt $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Bemerkung 4.4.8. (Notwendige und hinreichende Bedingungen)

Satz 4.4.7 gibt ein Kriterium ob die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ divergiert. Mithilfe des Satzes kann man leider keine Aussage darüber machen ob die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ konvergiert, betrachte nämlich

$$a_n := \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

dann gilt $\sum_{j=1}^{\infty} a_j = \infty$, aber $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Man sagt in diesem Fall $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ ist eine notwendige Bedingung dafür, dass $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ konvergiert, aber keine hinreichende Bedingung: Seien A, B beliebige Aussagen.

- (1): Falls $A \Rightarrow B$ gilt, so nennen wir A hinreichend für B .
- (2): Falls $B \Rightarrow A$ gilt, so nennen wir A notwendig für B .

Ist A notwendig und hinreichend für B , so gilt also $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$, das heißt $A \Leftrightarrow B$. In diesem Fall sind also A und B äquivalent. Deswegen wird 'notwendig und hinreichend' in der Literatur auch oft an Stelle von 'äquivalent' verwendet. Im Beispiel oben ist $A := (a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0)$ und $B := (\sum_{j=1}^{\infty} a_j \text{ konvergiert})$. A ist notwendig für B , aber

nicht hinreichend für B . Nach der Aussagenlogik gilt $B \Rightarrow A$ genau dann, wenn $\neg A \Rightarrow \neg B$. In diesem Fall also

$$(\neg A \Rightarrow \neg B) = ((a_n \text{ konvergiert nicht gegen } 0) \Rightarrow (\sum_{j=1}^n a_j \text{ konvergiert nicht})).$$

Das bedeutet: Wenn man nachprüfen kann, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht gegen 0 konvergiert, dann kann man darauf schließen, dass $\sum_{j=1}^n a_j$ nicht konvergiert.

Satz 4.4.9. (Majorantenkriterium)

Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen reeller Zahlen, mit $0 \leq a_j \leq b_j$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Dann gilt

(a) $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ konvergiert $\Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} a_j$ konvergiert.

(b) $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ divergiert $\Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} b_j$ divergiert.

Bemerkung 4.4.10.

Oft reicht es im Kontext von Konvergenz auch aus, dass eine Aussage nicht für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist, sondern erst ab einem festen $n_0 \in \mathbb{N}$: Am Beispiel von Satz 4.4.9 (a): Es existiere ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so dass $0 \leq a_j \leq b_j$ für alle $j \geq n_0$ gilt. Dann wollen wir zeigen, dass auch in diesem Fall gilt:

$$\sum_{j=1}^{\infty} b_j \text{ konvergiert} \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} a_j \text{ konvergiert.}$$

Beweis. Sei also $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ konvergent. Betrachte die Folgen

$$\begin{aligned} a'_n &:= a_{n+n_0} \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ b'_n &:= b_{n+n_0} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir sofort

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} b'_j &= \sum_{j=1}^{\infty} b_{j+n_0} \\ &= \sum_{j=n_0}^{\infty} b_j && \text{(Bemerkung 1.1.6)} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} b_j - \underbrace{\sum_{j=1}^{n_0-1} b_j}_{=: c} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} b_j - c. \end{aligned}$$

Somit konvergiert auch $\sum_{j=1}^{\infty} b'_j$. Weiter gilt $0 \leq a'_n = a_{n+n_0} \leq b_{n+n_0} \leq b'_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also konvergiert nach Satz 4.4.9 auch $\sum_{j=1}^{\infty} a'_j$. Daraus erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} a_j &= \sum_{j=n_0}^{\infty} a_j && \text{(Bemerkung 1.1.6)} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} a_j - \sum_{j=1}^{n_0-1} a_j, \end{aligned}$$

und somit konvergiert auch $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$. □

Satz 4.4.11. (Leibnitz-Kriterium)

Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge, so konvergiert $\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j a_j$.

Definition 4.4.12. (absolute Konvergenz)

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Man sagt $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ konvergiert absolut, falls $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|$ konvergiert.

Bemerkung 4.4.13.

Falls $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ absolut konvergiert, so konvergiert auch $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ (wähle $\sigma(j) = j$ für alle $j \in \mathbb{N}$ in Satz 4 der Vorlesung). Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht, betrachte etwa die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j}$. Diese Reihe konvergiert nach dem Leibnitz-Kriterium, aber sie konvergiert nicht absolut, da

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^j}{j} \right| = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} = \infty.$$

Mehr zu Satz 4 und allgemein Umordnungen nächste Woche.

Satz 4.4.14. (Quotientenkriterium)

$$(a) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{\infty} a_j \text{ konvergiert absolut.}$$

$$(b) \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{\infty} a_j \text{ divergiert.}$$

Beispiel 4.4.15. Betrachte

$$a_n := \frac{2^n n!}{n^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Wir wollen prüfen, ob $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ konvergiert. Verwende dazu das Quotientenkriterium: Es

gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
 \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \frac{\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{2^n n!}{n^n}} \\
 &= \frac{2^{n+1}(n+1)!n^n}{(n+1)^{n+1}2^n n!} \\
 &= \frac{2(n+1)n!n^n}{(n+1)^{n+1}n!} \\
 &= \frac{2n^n}{(n+1)^n} \\
 &= 2 \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \\
 &= 2 \left(\frac{n+1-1}{n+1} \right)^n \\
 &= 2 \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^n \\
 &= 2 \left(1 + \frac{-1}{n+1} \right)^{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^{-1} \\
 &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2 \cdot e^{-1} \cdot 1 && \text{(Grenzwertsätze)} \\
 &= \frac{2}{e}.
 \end{aligned}$$

Also

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{2}{e} < 1.$$

Nach dem Quotientenkriterium konvergiert also $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^j j!}{j^j}$ absolut.

Satz 4.4.16. (Wurzelkriterium)

(a) $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} a_j$ konvergiert absolut.

(b) $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} a_j$ divergiert.

Beispiel 4.4.17. Wir wollen prüfen, ob

$$\sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{(-1)^j \left(\frac{2j^2 - 5j + 2}{3j^2 + 1000j - 3} \right)^j}_{=: a_j}$$

konvergiert. Dazu verwenden wir das Wurzelkriterium: Es gilt

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{|a_n|} &= \sqrt[n]{\left|(-1)^n \left(\frac{2n^2 - 5n + 2}{3n^2 + 1000n - 3}\right)^n\right|} \\ &= \sqrt[n]{\left|\left(\frac{2n^2 - 5n + 2}{3n^2 + 1000n - 3}\right)^n\right|} \\ &= \left|\frac{2n^2 - 5n + 2}{3n^2 + 1000n - 3}\right| \\ &= \left|\frac{2 - \frac{5}{n} + \frac{2}{n^2}}{3 + \frac{1000}{n} - \frac{3}{n^2}}\right| \\ &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{??} \left|\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3} < 1 \end{aligned}$$

Also gilt $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{2}{3} < 1$ und somit konvergiert $\sum_{j=1}^{\infty} a_n$ absolut nach dem Wurzelkriterium.

Bemerkung 4.4.18. Die Ausdrücke $\sqrt[n]{|a_n|}$ (bzw. $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$) die im Wurzelkriterium (bzw. im Quotientenkriterium) auftauchen, konvergieren in vielen Fällen sogar, das heißt oft kann man \limsup , \liminf einfach durch \lim ersetzen. Begründung: Falls eine Folge konvergiert hat sie genau einen Häufungspunkt (nämlich den Grenzwert) und somit stimmen \limsup (größter Häufungspunkt) und \liminf (kleinster Häufungspunkt) überein und sind gleich dem Grenzwert.

Beispiel 4.4.19. Betrachte für $x \in \mathbb{R}$ die Reihe

$$\sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{x^j}_{=: a_j}.$$

Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe? Ganz viele Möglichkeiten:

(a) Verwende die geometrische Reihe. Es ist

$$a_n = \frac{x^n}{5^n} = \left(\underbrace{\frac{x}{5}}_{=:q}\right)^n$$

und damit konvergiert $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ genau dann, wenn $|q| < 1$, also genau dann, wenn $|x| < 5$ also $x \in (-5, 5)$.

(b) Verwende das Quotientenkriterium: Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \frac{\frac{|x|^{n+1}}{5^{n+1}}}{\frac{|x|^n}{5^n}} \\ &= \frac{|x|}{5} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{|x|}{5}, \end{aligned}$$

also erhalten wir auch hier, dass $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ konvergiert, falls $x \in (-5, 5)$ und divergiert, falls $|x| > 5$ ($x \in (-\infty, -5) \cup (5, \infty)$). Für $x \in \{-5, 5\}$ macht das Quotientenkriterium keine Aussage, da dann $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{5}{5} = 1$.

(c) Verwende das Wurzelkriterium: Es gilt

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{|a_n|} &= \sqrt[n]{\left|\left(\frac{x}{5}\right)^n\right|} \\ &= \sqrt[n]{\left|\frac{x}{5}\right|^n} \\ &= \frac{|x|}{5} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{5}. \end{aligned}$$

Also konvergiert nach dem Wurzelkriterium die Reihe, wenn $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x|}{5} < 1$, also wenn $x \in (-5, 5)$ und divergiert, falls $|x| > 5$ ($x \in (-\infty, -5) \cup (5, \infty)$). Auch hier erhalten wir keine Aussage, falls $x \in \{-5, 5\}$.

Beispiel 4.4.20. Wir untersuchen die Reihe

$$\sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{\frac{2^{(-1)^j}}{2^j}}_{=: a_j}$$

auf Konvergenz.

(a) Versuche Quotientenkriterium: Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \frac{\frac{2^{(-1)^{n+1}}}{2^{n+1}}}{\frac{2^{(-1)^n}}{2^n}} \\ &= \frac{2^{(-1)^{n+1}}}{2 \cdot 2^{(-1)^n}} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} & n \text{ gerade} \\ \frac{2 \cdot 2}{2} = 2 & n \text{ ungerade} \end{cases}. \end{aligned}$$

d.h.

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= 2 > 1 \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \frac{1}{4} < 1, \end{aligned}$$

wir erhalten hier also keine Aussage über Konvergenz mit dem Quotientenkriterium.

(b) Mit dem Wurzelkriterium gilt

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{|a_n|} &= \sqrt[n]{\left| \frac{2(-1)^n}{2^n} \right|} \\ &= \frac{\sqrt[n]{2(-1)^n}}{2} \\ &= \begin{cases} \frac{\sqrt[n]{2}}{2} & n \text{ gerade} \\ \frac{\sqrt[n]{\frac{1}{2}}}{2} & n \text{ ungerade} \end{cases} . \end{aligned}$$

Wegen $\sqrt[n]{x} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ für alle $x > 0$ gilt also $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{2} < 1$ und somit konvergiert die Reihe absolut nach dem Wurzelkriterium.

Bemerkung 4.4.21. Es gilt

$$\begin{aligned} M &:= \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ reelle Folge}\} \\ &= \{(s_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid (s_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist Partialsummenfolge einer reellen Folge } (a_n)_{n \in \mathbb{N}}\} =: N . \end{aligned}$$

Beweis. Um zu zeigen, dass die Mengen M, N gleich sind, kann man zeigen, dass beide jeweils Teilmengen voneinander sind, man zeigt also $M \subseteq N$ und $N \subseteq M$. Zusammen folgt dann $M = N$. Für zwei Mengen A, B gilt $A \subseteq B$ per Definition genau dann, wenn

$$x \in A \Rightarrow x \in B .$$

$N \subseteq M$: Sei also $x \in N$, d.h. $x = (s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist die Partialsummenfolge einer Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Da Partialsummenfolgen ebenso reelle Folgen sind, folgt auch sofort $x = (s_n)_{n \in \mathbb{N}} \in M$.

$M \subseteq N$: Sei $x \in M$, d.h. $x = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine reelle Folge. Wir wollen zeigen, dass man x als Partialsummenfolge schreiben kann, d.h. wir müssen eine Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ finden, so dass

$$s_n := \sum_{j=1}^n b_j = a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

gilt. Definiere

$$\begin{aligned} b_1 &:= a_1 \\ b_{n+1} &:= a_{n+1} - a_n \quad \forall n \in \mathbb{N} . \end{aligned}$$

Dann ist $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge und es gilt

$$s_n = \sum_{j=1}^n b_j = a_n ,$$

was wir per Induktion beweisen.

IA: $n = 1$. Es gilt

$$s_1 = \sum_{j=1}^1 b_j = b_1 = a_1 .$$

IV: Gelte also für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$

$$s_n = \sum_{j=1}^n b_j = a_n,$$

IS: $n \mapsto n + 1$: Es gilt

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= \sum_{j=1}^{n+1} b_j = s_n + b_{n+1} \\ &= a_n + b_{n+1} \\ &= a_n + a_{n+1} - a_n \\ &= a_{n+1}. \end{aligned} \tag{IV}$$

Also gilt $x = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (s_n)_{n \in \mathbb{N}}$, und $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist die Partialsummenfolge der Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Daraus folgt $x \in N$.

Intuitiv gesprochen haben wir gerade gezeigt, dass die Menge aller reellen Folgen (M) dasselbe ist, wie die Menge aller Partialsummenfolgen von reellen Folgen (N) . \square

4.5 Limes und Reihen vertauschen

Seien $a_{n,j}$ reelle Zahlen: Wir wissen bereits (wegen den Grenzwertsätzen und Induktion), dass sofern $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n,j}$ für jedes $j \in \mathbb{N}$ existiert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^k a_{n,j} = \sum_{j=0}^k \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n,j}.$$

In vielen Problemstellungen der Mathematik ist es hilfreich zu wissen, ob auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{n,j} = \sum_{j=0}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n,j}.$$

Eigentlich werden hier zwei Grenzwerte vertauscht, nämlich

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{n,j} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^m a_{n,j} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^m a_{n,j} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^m \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n,j} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n,j} \end{aligned}$$

Das Vertauschen von Grenzwerten ist ein Problem das in der Mathematik sehr häufig vorkommt. In vielen Fällen ist völlig unklar, ob eine derartige Vertauschung erlaubt ist oder nicht. Betrachte zum Beispiel

$$a_{n,j} := \begin{cases} \frac{1}{n} & j \in \{1, \dots, n\} \\ 0 & j > n \end{cases} .$$

Dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n,j} = 0$ und somit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{n,j} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n \frac{1}{n} = 1 \neq 0 = \sum_{j=0}^{\infty} 0 = \sum_{j=0}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n,j} .$$

Satz 4.5.1. (Majorisierte Konvergenz) Seien $a_{n,j}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $j \in \mathbb{N}_0$ reelle Zahlen, so dass $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n,j}$ für jedes $j \in \mathbb{N}_0$ existiert. Gibt es eine reelle Folge $(b_j)_{j \in \mathbb{N}}$ mit $|a_{n,j}| \leq b_j$ für alle $n \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}_0$ und $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ konvergiert, dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{n,j} = \sum_{j=0}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n,j} ,$$

und beide Ausdrücke existieren.

Bemerkung 4.5.2.

Dieser Satz ist ein Spezialfall des Satzes von der majorisierten Konvergenz für Integrale.

Beispiel 4.5.3. Wir möchten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \right)^j}_{a_{n,j}}$$

bestimmen. Dazu gibt es zwei Möglichkeiten:

- (a) Falls wir den Limes in die Reihe ziehen dürfen gilt

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \right)^j &= \sum_{j=0}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \right)^j \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{e} \right)^j \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{e}} && \text{(Geometrische Reihe)} \\ &= \frac{1}{\frac{e-1}{e}} \\ &= \frac{e}{e-1} . \end{aligned}$$

Also müssen wir noch prüfen, dass wir Limes und Reihe vertauschen dürfen. Hierzu prüfen wir die Bedingungen für den Satz über dominierte Konvergenz nach. Wir wissen bereits, dass für jedes $j \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n,j} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \right)^j = \left(\frac{1}{e}\right)^j$$

und weiter gilt mit Aufgabe 9, dass $2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Daher

$$a_{n,j} \leq \left(\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \right)^j \leq \frac{1}{2^j} =: b_j,$$

Weil $\sum_{j=1}^{\infty} b_j = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j}$ eine konvergente geometrische Reihe ist, sind alle Voraussetzungen für den Satz über majorisierte Konvergenz erfüllt.

(b) Alternativ gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} a_{n,j} &= \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \right)^j \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}} \quad \left(\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} < 1 \text{ für jedes feste } n \in \mathbb{N} \right) \\ &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - 1} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{e}{e - 1}. \end{aligned}$$

Satz 4.5.4. (Satz über Doppelreihen) Seien $a_{n,j}$ für jedes $n \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}$ reelle Zahlen, und es gebe ein $B > 0$, so dass

$$\forall k, m \in \mathbb{N} : \sum_{j=0}^k \sum_{n=0}^m |a_{n,j}| \leq B.$$

Dann gilt

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,j} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{n,j},$$

und beide Ausdrücke existieren.

Beispiel 4.5.5. Betrachte $a_{n,j} := (-1)^j \frac{(1-2^{-j})^n}{j!}$ für alle $n, j \in \mathbb{N}$. Wir wollen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{n,j}$$

berechnen.

Falls der Satz über Doppelreihen gilt, erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{n,j} &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,j} && \text{(Umordnungssatz)} \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^j \frac{(1 - 2^{-j})^n}{j!} \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \sum_{n=0}^{\infty} (1 - 2^{-j})^n \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \frac{1}{1 - (1 - 2^{-j})} \quad (\text{Geometrische Reihe, } 1 - 2^{-j} < 1 \text{ für alle } j \in \mathbb{N}_0) \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} 2^j \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-2)^j}{j!} \\
 &= e^{-2}.
 \end{aligned}$$

Wir müssen noch zeigen, dass man den Satz über Doppelreihen anwenden darf. Dazu ergibt sich für beliebige $k, m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=0}^k \sum_{n=0}^m |a_{n,j}| &= \sum_{j=0}^k \sum_{n=0}^m \frac{(1 - 2^{-j})^n}{j!} \\
 &= \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} \sum_{n=0}^m (1 - 2^{-j})^n \\
 &= \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} \frac{1 - (1 - 2^{-j})^{m+1}}{1 - (1 - 2^{-j})} \\
 &= \sum_{j=0}^k \frac{2^j}{j!} (1 - (1 - 2^{-j})^{m+1}) \\
 &\leq \sum_{j=0}^k \frac{2^j}{j!} \\
 &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^j}{j!} \\
 &= e^2 =: B.
 \end{aligned}$$

Also gibt es ein $B > 0$ (nämlich e^2), so dass

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N} : \sum_{j=0}^k \sum_{n=0}^m |a_{n,j}| \leq B$$

Das heißt man darf den Satz verwenden und obige Rechnung gilt.

5 Relle Funktionen

Definition 5.1. (Funktion, Abbildung) Seien A, B Mengen.

- (a) Eine Relation von A nach B ist eine Teilmenge C des kartesischen Produkts $A \times B = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}$ (also $C \subseteq A \times B$).
- (b) Sei f eine Relation von A nach B . Wir nennen f eine Funktion (oder Abbildung oder Funktionalrelation), falls gilt

$$\forall x \in A \quad \exists y \in B : ((x, y) \in f) \wedge (\forall z \neq y : (x, z) \notin f)$$

bzw. anders geschrieben mit $\exists!$ („es existiert genau ein“)

$$\forall x \in A \exists! y \in B : (x, y) \in f.$$

Anstelle von $f \subseteq A \times B$ schreiben wir $f : A \rightarrow B$. y heißt Funktionswert von x und wird oft mit $f(x)$ bezeichnet ($y = f(x)$). Wir schreiben $x \mapsto f(x)$ für $(x, f(x)) \in f$ und nennen dies die Funktionsvorschrift von f . A heißt Definitionsbereich von f und B heißt Bildbereich (oder Wertebereich) von f .

- (c) Sei $f : A \rightarrow B$ eine Funktion. f heißt

- (1) injektiv, falls

$$\forall x_1, x_2 \in A : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Anschaulich gesprochen. Jedes Element im Bildbereich wird höchstens einmal getroffen. Anders ausgedrückt:

$$\forall x_1, x_2 \in A : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

- (2) surjektiv, falls

$$\forall y \in B \quad \exists x \in A : f(x) = y.$$

Anschaulich gesprochen: Jedes Element im Bildbereich wird getroffen.

- (3) bijektiv, falls f injektiv und surjektiv ist. Anschaulich gesprochen: Jedes Element wird genau einmal getroffen, in Quantoren:

$$\forall y \in B \quad \exists! x \in A : f(x) = y.$$

Bemerkung 5.2.

Um eine Funktion f zu definieren, muss man die Definitionsbereich, Bildbereich und Funktionsvorschrift angeben. Zum Beispiel: Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $x \mapsto f(x) := e^x$.

Bemerkung 5.3. (Negationen für Injektivität, Surjektivität und Bijektivität)

Ist $f : A \rightarrow B$ eine Funktion, so ist f

(1) nicht injektiv, falls

$$\exists x_1, x_2 \in A : (f(x_1) = f(x_2)) \wedge (x_1 \neq x_2).$$

(2) nicht surjektiv, falls

$$\exists y \in B \quad \forall x \in A : f(x) \neq y.$$

(3) nicht bijektiv, falls f nicht surjektiv, aber injektiv oder nicht injektiv aber surjektiv, oder nicht injektiv und nicht surjektiv ist.

Beispiel 5.4. (Beispiele für Funktionen)

(a) Eine Folge ist eine Funktion $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Die Abbildung a kann nicht surjektiv sein (das liegt daran, dass \mathbb{N} abzählbar, aber \mathbb{R} überabzählbar ist), sie kann aber injektiv sein (betrachte z.B. $a_n := n$ bzw. $a_n := 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$).

(b) Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge und $(a_{\sigma(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge, so ist $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine Funktion, die $\sigma(n) < \sigma(n + 1)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ erfüllt.

(c) Setze $A := \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $B := \{1, 2, 3, 4\}$. Betrachte $f : A \rightarrow B$ definiert durch

$$\begin{aligned} 1 &\mapsto 1 \\ 2 &\mapsto 1 \\ 3 &\mapsto 2 \\ 4 &\mapsto 3 \\ 5 &\mapsto 3 \end{aligned}$$

f ist weder injektiv noch surjektiv.

Beweis. (1) Seien $x_1 := 1, x_2 := 2$. Dann gilt $x_1, x_2 \in A$ und $f(x_1) = 1 = f(x_2)$, sowie $x_1 \neq x_2$. Also ist f nicht injektiv.

(2) Sei $y := 4 \in B$. Dann gilt für jedes $x \in A : f(x) \neq y$. Also ist f nicht surjektiv.

□

(d) Setze $A := \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $B := \{1, 2, 3, 4\}$. Betrachte $f : A \rightarrow B$ definiert durch

$$\begin{aligned} 1 &\mapsto 1 \\ 2 &\mapsto 1 \\ 3 &\mapsto 2 \\ 4 &\mapsto 3 \\ 5 &\mapsto 4 \end{aligned}$$

f ist surjektiv, aber nicht injektiv.

(e) Setze $A := \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $B := \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Betrachte $f : A \rightarrow B$ definiert durch

$$\begin{aligned} 1 &\mapsto 1 \\ 2 &\mapsto 3 \\ 3 &\mapsto 2 \\ 4 &\mapsto 4 \\ 5 &\mapsto 5 \end{aligned}$$

f ist bijektiv.

Beispiel 5.5.

Bei Funktionen ist es wichtig, den Definitionsbereich und Bildbereich zu beachten:

(a) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $x \mapsto f(x) := |x|$. Dann ist f nicht injektiv und auch nicht surjektiv, denn

(1) Für $x_1 := 1$ und $x_2 := -1$ gilt $x_1 \neq x_2$ und $f(x_1) = |x_1| = |1| = 1 = |-1| = f(x_2)$.

(2) Für $y := -1 \in \mathbb{R}$ gibt es kein $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| = -1$, da $|x| \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(b) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ definiert durch $x \mapsto f(x) := |x|$. Dann ist f nicht injektiv (Beweis wie oben), aber surjektiv, da wir zu $y \in [0, \infty)$ einfach $x := y \in \mathbb{R}$ wählen können und dann gilt

$$f(x) = |x| = |y| = y.$$

(c) Sei $f : (-\infty, 0] \rightarrow [0, \infty)$ definiert durch $x \mapsto f(x) := |x|$. Dann ist f bijektiv. Zu gegebenem $y \in [0, \infty)$ wählen wir $x := -y$, dann gilt

$$f(x) = |x| = |-y| = y.$$

Seien nun $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$ beliebig mit $f(x_1) = f(x_2)$, d.h. $|x_1| = |x_2|$. Wegen $x_1, x_2 \leq 0$ folgt $|x_i| = -x_i$ für $i \in \{1, 2\}$ und somit $-x_1 = -x_2$, also $x_1 = x_2$. Damit haben wir gezeigt

$$\forall x_1, x_2 \in A : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2,$$

und somit ist f injektiv.

5.1 Stetigkeit

Definition 5.1.1. (Stetigkeit)

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ und $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

(a) Sei $x_0 \in A$. f heißt stetig in x_0 , falls:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in A : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

(b) f heißt stetig, falls f in jedem Punkt $x_0 \in A$ stetig ist.

Satz 5.1.2. (Folgenstetigkeit)

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in A$. Dann sind äquivalent:

(a) f ist stetig in x_0

(b) Für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \in A$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$ gilt $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x_0)$.

Bemerkung 5.1.3. (Negationen für Stetigkeit) $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ist **nicht** stetig in $x_0 \in A$, falls:

(a)

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x \in A : (|x - x_0| < \delta) \wedge (|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon).$$

(b) es gibt eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \in A$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$ und $f(x_n)$ konvergiert nicht gegen x_0 . Oder gänzlich in Quantoren:

$$\exists \text{ reelle Folge } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : (x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0) \wedge (f(x_n) \text{ konvergiert mit } n \rightarrow \infty \text{ nicht gegen } x_0)$$

Beispiel 5.1.4.

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann ist f stetig. Zwei Beweise:

(1) Per Definition: Sei $\varepsilon > 0$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig. Wähle $\delta := \varepsilon > 0$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta$

$$|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \delta = \varepsilon.$$

(2) Per Folgenstetigkeit: Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge mit $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$. Dann gilt

$$f(x_n) = x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0 = f(x_0).$$

Beispiel 5.1.5.

(a) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := x^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann ist f stetig. Zwei Beweise:

(1) Per Definition: Sei also $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $\delta > 0$ so, dass $\delta < \min(1, \frac{\varepsilon}{2|x_0|+1})$. Aus $\delta < 1$ folgt

$$|x + x_0| = |x - x_0 + 2x_0| \leq |x - x_0| + 2|x_0| < \delta + 2|x_0| < 2|x_0| + 1.$$

Dann gilt für alle $x \in A$ mit $|x - x_0| < \delta$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |x^2 - x_0^2| = |(x - x_0)(x + x_0)| = |x - x_0| \cdot |x + x_0| \\ &< \delta |x + x_0| < \delta(2|x_0| + 1) < \frac{\varepsilon}{2|x_0| + 1} (2|x_0| + 1) = \varepsilon. \end{aligned}$$

- (2) Mit Folgenstetigkeit. Sei also $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge mit $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$. Dann gilt

$$f(x_n) = x_n^2 = x_n \cdot x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \cdot x = x^2 = f(x).$$

- (b) Sei $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & 1 < x \leq 2 \end{cases}.$$

f ist stetig in jedem Punkt $x_0 \in [0, 2] \setminus \{1\}$ (Übung, Lösung nächste Woche). f ist nicht stetig in $x_0 = 1$. Wieder zwei Beweise:

- (1) Wähle $\varepsilon := \frac{1}{2}$ und sei $\delta > 0$ beliebig. Wähle $x = 1 + \frac{\delta}{2} \in [0, 2]$ falls $\delta < 2$ und $x = 2$ sonst. Dann gilt

$$|x - x_0| = |x - 1| = \left|1 + \frac{\delta}{2} - 1\right| = \frac{\delta}{2} < \delta,$$

(bzw. $|x - x_0| = |2 - 1| = 1 < \delta$ falls $\delta > 2$). und

$$|f(x) - f(x_0)| = |1 - 0| = 1 \geq \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

- (2) Sei $x_n := 1 + \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 = x_0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $f(x_n) = 1$, da $x_n > 1$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Somit folgt

$$f(x_n) = 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \neq 0 = f(1) = f(x_0).$$

Satz 5.1.6.

Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ und $f : A \rightarrow B$ stetig in x_0 und $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in $f(x_0)$. Dann ist $g \circ f : A \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in x_0 .

Beispiel 5.1.7.

- (a) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := e^{-x^2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann ist f stetig: Die Funktionen $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\begin{aligned} g(x) &:= e^x \\ h(x) &:= -x^2 \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ sind stetig in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann ist auch

$$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = e^{h(x)} = e^{-x^2} = f(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ stetig in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$. Also ist f stetig.

(b) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{x^2}\right) & x \in \mathbb{R} \setminus 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$

f ist als Verkettung stetiger Funktionen überall stetig außer in $x_0 = 0$. Wir wollen zeigen, dass f in $x_0 = 0$ nicht stetig ist. Idee: f oszilliert nahe der 0 stark zwischen -1 und 1 , versuche daher eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zu wählen mit $x_n \rightarrow 0$ mit $n \rightarrow \infty$ und $f(x_n) = 1$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Es ist $\cos(\pi/x^2) = 1$ genau dann, wenn

$$\begin{aligned} \exists k \in \mathbb{Z} : \frac{\pi}{x^2} &= k2\pi \\ \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x &= \pm \frac{1}{\sqrt{2k}} \end{aligned}$$

Wähle nun $x_n := \frac{1}{\sqrt{2n}}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $x_n \rightarrow x_0 = 0$ mit $n \rightarrow \infty$ und

$$\begin{aligned} f(x_n) &= \cos\left(\frac{\pi}{x_n^2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)^2}\right) \\ &= \cos(2\pi n) = 1 \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Also $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \neq 0 = f(x_0)$. Damit ist f nicht stetig in 0.

Satz 5.1.8. (Zwischenwertsatz)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es für jedes $y \in [f(a), f(b)]$ (falls $f(a) < f(b)$, sonst $y \in [f(b), f(a)]$) ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = y$. Intuitiv gesprochen: f nimmt jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ mindestens einmal an.

Beispiel 5.1.9. (Übungsaufgabe aus 2020)

Sei $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $f(0) = f(2)$. Dann gibt es ein $c \in [0, 1]$ mit $f(c + 1) = f(c)$.

Beweis. Sei $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) := f(x + 1) - f(x)$ für alle $x \in [0, 1]$. Dann ist g stetig auf ganz $[0, 1]$: Sei dazu $x_0 \in [0, 1]$ beliebig und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Folge mit $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$. Dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n + 1 = x_0 + 1$ und da f stetig in x_0 und $x_0 + 1 \in [1, 2]$ ist, gilt

$$g(x_n) = f(x_n + 1) - f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x_0 + 1) - f(x_0) = g(x_0).$$

Es gilt nun

$$\begin{aligned} g(0) &= f(1) - f(0), \\ g(1) &= f(2) - f(1) = f(0) - f(1) = -(f(1) - f(0)). \end{aligned}$$

Also $g(0) = -g(1)$. Wir unterscheiden nun drei Fälle:

- (a) $g(0) < 0$. Dann ist $g(1) = -g(0) > 0$. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es ein $c \in [0, 1]$ mit $g(c) = 0$ (da $0 \in [g(0), g(1)]$), d.h.

$$f(c + 1) - f(c) = g(c) = 0.$$

Stellen wir dies um erhalten wir $f(c + 1) = f(c)$.

(b) $g(0) > 0$. In diesem Fall ist $g(1) = -g(0) < 0$ und die Behauptung folgt analog zu Fall (a).

(c) $g(0) = 0$. Dann ist auch $g(1) = -g(0) = 0$ und es ist $0 \in \{0\} = [g(0), g(1)]$. Wieder nach dem Zwischenwertsatz gibt es ein $c \in [0, 1]$ mit $g(c) = 0$.

□

Beispiel 5.1.10.

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend, d.h.

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b] : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Dann ist $g : [a, b] \rightarrow [f(a), f(b)]$ definiert durch $g(x) := f(x)$ für alle $x \in [a, b]$ stetig.

Bemerkung 5.1.11.

Eine Funktion $f : A \rightarrow B$ ist genau dann injektiv, wenn

$$\forall x_1, x_2 \in A : \underbrace{x_1 \neq x_2}_{=: A_{x_1, x_2}} \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

A_{x_1, x_2} ist die Kontraposition der Aussage

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Beweis. (1) Injektivität: Sind $x_1, x_2 \in [a, b]$ mit $x_1 \neq x_2$, so gilt $x_1 < x_2$ oder $x_2 < x_1$. Also gilt aufgrund der strikten Monotonie $f(x_1) < f(x_2)$ oder $f(x_2) < f(x_1)$ und somit in beiden Fällen $g(x_1) = f(x_1) \neq f(x_2) = g(x_2)$. Mit Bemerkung 5.1.11 folgt die Injektivität von g .

(2) Sei $y \in [f(a), f(b)]$ beliebig. Dann gibt es nach dem Zwischenwertsatz ein $c \in [a, b]$ mit $f(c) = y$, also auch $g(c) = f(c) = y$. Damit ist g surjektiv.

□

Beispiel 5.1.12.

Wir wollen prüfen ob es eine Lösung $c \geq 0$ für die Gleichung

$$\frac{1}{1+x^2} = \sqrt{x}$$

gibt. Definiere dazu $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \frac{1}{1+x^2} - \sqrt{x}.$$

f ist stetig auf ganz $[0, \infty)$: Sei dazu $x_0 \in [0, \infty)$ beliebig und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in $[0, \infty)$ mit $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$. Dann gilt wegen der Grenzwertsätze

$$f(x_n) = \frac{1}{1+x_n^2} - \sqrt{x_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x_0^2} - \sqrt{x_0} = f(x_0).$$

Weiter gilt

$$f(0) = \frac{1}{1+0^2} - \sqrt{0} = 1 > 0,$$

$$f(1) = \frac{1}{1+1} - \sqrt{1} = -\frac{1}{2} < 0.$$

Nach dem Zwischenwertsatz gibt es ein $c \in [0, 1]$ mit $f(c) = 0$, also

$$\frac{1}{1+c^2} - \sqrt{c} = f(c) = 0,$$

und somit

$$\frac{1}{1+c^2} = \sqrt{c}.$$

Satz 5.1.13. (Satz vom Maximum und Minimum)

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f beschränkt und nimmt auf $[a, b]$ ein Maximum x_{\max} und Minimum x_{\min} an, d.h.

$$\forall x \in [a, b] : f(x_{\min}) \leq f(x) \leq f(x_{\max}).$$

Bemerkung 5.1.14.

- (a) Satz 5.1.13 gilt im Allgemeinen nicht, falls man ein offenes Intervall (a, b) statt einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ hat: Betrachte etwa $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := 1/x$ für alle $x \in (0, 1)$. f ist unbeschränkt und hat kein Maximum auf $(0, 1)$.
- (b) Maxima und Minima müssen nicht eindeutig sein, betrachte etwa $g : [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) := \sin(x)$. Allgemein gilt $\sin(x) \in [-1, 1]$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und g nimmt die Werte $-1, 1$ mehrmals an, es gilt nämlich

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 = \sin\left(\frac{5\pi}{2}\right),$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1 = \sin\left(\frac{7\pi}{2}\right).$$

- (c) Auch nicht-stetige Funktionen können Maxima und Minima haben. Betrachte etwa $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$h(x) := \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$

h hat offensichtlich das Maximum 1 und das Minimum -1.

Definition 5.1.15. (Grenzwerte von Funktionen)

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und seien $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$. Wir sagen, f hat in x_0 den Grenzwert y_0 , falls

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in A : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - y_0| < \varepsilon.$$

Bemerkung 5.1.16.

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und seien $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$. Dann hat f in x_0 den Grenzwert y_0 genau dann wenn: Für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \in A$ und $x_n \neq x_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$ gilt $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x_0)$.

Beispiel 5.1.17.

Oft fragt man sich, ob stetige Funktionen, die Definitionslücken auf \mathbb{R} haben, stetig auf ganz \mathbb{R} fortgesetzt werden können. Betrachte etwa $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \frac{\sin(x)}{x}.$$

Dann ist f stetig. Können wir eine Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ finden mit $g(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und g stetig? Dafür müssen wir $g(0)$ so definieren, dass für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0 := 0$ auch $g(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g(x_0) = g(0)$ gilt. Dies läut also auf die Berechnung von $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ hinaus. Sei also $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge mit $x_n \neq x_0$ und $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(x_n)}{x_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{2j+1} \frac{x_n^{2j+1}}{(2j+1)!} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{2j} \frac{x_n^{2j+1}}{(2j+1)!} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \left((-1)^{2j+1} \frac{x_n^{2j+1}}{(2j+1)!} \right) \quad (\text{Majorisierte Konvergenz, Übung}) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{2j+1} \frac{x_0^{2j+1}}{(2j+1)!} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{2j+1} \frac{0^{2j+1}}{(2j+1)!} \\ &= (-1)^0 \frac{0^0}{(2 \cdot 0 + 1)!} = 1. \end{aligned}$$

Mit dieser Überlegung ist also $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(x) := \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & x \in \mathbb{R} \setminus 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

stetig.

5.2 Funktionenfolgen

Definition 5.2.1.

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ und $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dann nennt man $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Funktionsfolge. Sei $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ eine weitere Funktion.

- (a) Wir sagen, dass f_n punktweise gegen f konvergiert (Schreibweise: $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ punktweise), falls

$$\forall x \in A \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

oder anders ausgedrückt: $\forall x \in A : f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$.

oder nochmal anders ausgedrückt: Die reelle Folge $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert mit $n \rightarrow \infty$ gegen $f(x)$.

Merke: Bei punktweiser Konvergenz darf n_0 von $x \in A$ und $\varepsilon > 0$ abhängen.

- (b) Wir sagen, dass f_n gleichmäßig gegen f konvergiert, (Schreibweise: $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{glm}} f$), falls

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall x \in A : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Merke: Bei gleichmäßiger Konvergenz darf n_0 von $\varepsilon > 0$ abhängen, aber **nicht** von $x \in A$.

Bemerkung 5.2.2. (Negationen zur Konvergenz von Funktionenfolgen)

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ und $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dann nennt man $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Funktionenfolge. Sei $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ eine weitere Funktion.

- (a) f_n konvergiert mit $n \rightarrow \infty$ **nicht** punktweise gegen f , falls

$$\exists x \in A \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \forall n_0 \in \mathbb{N} \exists n \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon.$$

Merke: $n \geq n_0$ darf von n_0, x und ε abhängen. ε darf von x abhängen.

- (b) f_n konvergiert mit $n \rightarrow \infty$ **nicht** gleichmäßig gegen f , falls

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall n_0 \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq n_0 \quad \exists x \in A : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon.$$

Merke: x darf von n, n_0 und ε abhängen. n darf von n_0 und ε abhängen.

Beispiel 5.2.3.

- (a) Sei $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f_n(x) := x^n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert f_n punktweise gegen $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} 0 & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases},$$

denn: Für festes $x \in [0, 1)$ ist $f_n(x) = x^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 = f(x)$ und $f_n(1) = 1^n = 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 = f(1)$. f_n konvergiert nicht gleichmäßig gegen f . Sei dazu $\varepsilon := \frac{1}{2}$ (jedes andere $\varepsilon \in (0, 1]$ geht auch) und $n_0 \in \mathbb{N}$ beliebig. Wähle $n := n_0$ und $x := \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}} \in (0, 1]$ (oder für anderes $0 < \varepsilon \leq 1$ wähle $x := \varepsilon^{\frac{1}{n}}$). Dann gilt

$$|f_n(x) - f(x)| = |x^n - 0| = \left| \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}\right)^n \right| = \frac{1}{2} = \varepsilon \geq \varepsilon.$$

Intuitiv: Für x „nah“ bei 1 ist die Konvergenz gegen 0 sehr langsam, für x „nah“ bei 0 ist sie sehr schnell, d.h. nicht gleichmäßig „schnell“ oder „langsam“ für alle $x \in [0, 1)$.

- (b) Sei $0 < q < 1$ und $f_n : [0, q] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f_n(x) := x^n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert f_n punktweise gegen $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ gegen $f(x) = 0$ (wie in (a)). Die Konvergenz ist gleichmäßig: Sei dazu $\varepsilon > 0$ beliebig und nehme $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $q^n < \varepsilon$. Dies ist möglich, da $q^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Dann gilt für alle $n \geq n_0$ und alle $x \in [0, q]$

$$|f_n(x) - f(x)| = |x^n - 0| = |x|^n \leq q^n < \varepsilon.$$

Intuitiv: Wir haben eine Schranke (q^n) die unabhängig von x gegen 0 geht.

- (c) Sei $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f_n(x) := \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}}$. Dann gilt für $x \in (0, 1]$

$$f_n(x) = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \exp(\log(x^{\frac{1}{n}})) = \frac{1}{n} \exp\left(\frac{1}{n} \log(x)\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \cdot e^0 = 0.$$

Also konvergiert f_n punktweise gegen $f(x)$. Die Konvergenz ist auch gleichmäßig: Sei dazu $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $\frac{1}{n} < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Dann gilt für alle $x \in [0, 1]$

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}} \right| = \frac{1}{n}|x|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Intuitiv: Der Vorfaktor $\frac{1}{n}$ sorgt dafür, dass der Faktor $x^{\frac{1}{n}}$ für die Konvergenzgeschwindigkeit „vernachlässigbar“ wird, die Konvergenz also gleichmäßig wird.

Satz 5.2.4.

Sind $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ stetig und konvergieren gleichmäßig gegen f , so ist f stetig.

Bemerkung 5.2.5.

Kehre noch einmal zu Beispiel 5.2.3 (a) zurück: Man kann die gleichmäßige Konvergenz auch wie folgt widerlegen: Angenommen die stetigen f_n würden mit $n \rightarrow \infty$ gleichmäßig gegen f konvergieren. Dann wäre mit Satz 5.2.4 f stetig auf $[0, 1]$. Aber f ist nicht stetig in $x = 1$ (Übung). Das ist ein Widerspruch, also kann f_n mit $n \rightarrow \infty$ nicht gleichmäßig gegen f konvergieren.

Definition 5.2.6. (Konvergenz von Funktionenreihen)

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ und $f_j : A \rightarrow \mathbb{R}$ für jedes $j \in \mathbb{N}$ eine Funktion. Wir nennen $\sum_{j=0}^{\infty} f_j$ Funktionenreihe. $\sum_{j=0}^{\infty} f_j$ konvergiert punktweise, falls die Funktionenfolge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $s_n : A \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$s_n(x) := \sum_{j=0}^n f_j(x)$$

punktweise konvergiert. Per Definition ist dann $\sum_{j=0}^{\infty} f_j(x)$ der Grenzwert. $\sum_{j=0}^{\infty} f_j$ konvergiert gleichmäßig, falls die Funktionenfolge s_n gleichmäßig konvergiert.

Satz 5.2.7.

Falls gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall k \geq 1 \quad \forall x \in A : |f_n(x) - f_{n+k}(x)| < \varepsilon.$$

so konvergiert die Funktionenfolge $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$ gleichmäßig gegen eine Funktion $f : A \rightarrow \mathbb{R}$.

Satz 5.2.8. (Weierstraßsches Majorantenkriterium)

Seien $f_j : A \rightarrow \mathbb{R}$ für jedes $j \in \mathbb{N}_0$ stetige Funktionen mit

$$|f_j(x)| \leq b_j \quad \forall x \in A \quad \forall j \in \mathbb{N}_0.$$

Falls $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ konvergiert, dann konvergiert $\sum_{j=0}^{\infty} f_j$ gleichmäßig.

Beispiel 5.2.9. (Riemannsches Zeta-Funktion)

Sei $\alpha > 1$ beliebig. Die Funktion $\zeta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\zeta(x) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j^x},$$

konvergiert punktweise für alle $x \geq \alpha$ also auf $[\alpha, \infty)$ (sie konvergiert sogar punktweise für alle $x > 1$ nach Vorlesung). Damit ist gemeint: Für $f_j : [\alpha, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_j(x) := \frac{1}{j^x},$$

konvergiert $\zeta(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j^x}$ punktweise. Wir zeigen sogar gleichmäßige Konvergenz auf $[\alpha, \infty)$. Dazu betrachte für beliebiges $x \in [\alpha, \infty)$ und $j \in \mathbb{N}_0$

$$|f_j(x)| = \frac{1}{j^x} \leq \frac{1}{j^\alpha} =: b_j,$$

und es gilt

$$\sum_{j=0}^{\infty} b_j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j^\alpha} < \infty,$$

da $\alpha > 1$. Somit konvergiert $\zeta(x)$ absolut und gleichmäßig auf $[\alpha, \infty)$. Die Partialsummen

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{j=0}^n f_j(x) = \sum_{j=0}^n \frac{1}{j^x} \\ &= \sum_{j=0}^n \exp(\log(j^x)) \\ &= \sum_{j=0}^n \underbrace{\exp(x \log(j))}_{\text{Stetig als Verkettung stetiger Funktionen}} \end{aligned}$$

sind als Summe stetiger Funktionen stetig. Nach Satz 5.2.4 ist damit ζ stetig auf $[\alpha, \infty)$.

Bemerkung 5.2.10.

Man kann $\zeta(x)$ auch für alle $x \in \mathbb{C}$ definieren. Ein berühmtes ungelöstes Problem der Mathematik ist die Frage, ob alle Nullstellen $z \in \mathbb{C}$ von ζ , also alle $z \in \mathbb{C}$ die $\zeta(z) = 0$ erfüllen, Realteil $\frac{1}{2}$ haben. Das ist die Riemannsches Vermutung.

5.3 Gleichmäßige Stetigkeit

Definition 5.3.1.

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ und $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

(a) f heißt stetig, falls

$$\forall x_0 \in A \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \forall x \in A : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Merke: δ darf von x_0 und ε abhängen.

(b) f heißt gleichmäßig stetig, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \forall x, x_0 \in A : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Merke: δ darf nur noch von ε abhängen.

Beispiel 5.3.2.

(a) Betrachte noch einmal $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) := x^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Wir wissen mit Beispiel 5.1.5 schon dass f stetig ist. f ist nicht gleichmäßig stetig. Sei dazu $\varepsilon := 1$ und $\delta > 0$ beliebig. Wähle $x_0 := \frac{1}{\delta}$ und $y = x_0 + \frac{\delta}{2}$. Dann gilt $|x - x_0| = |x_0 + \frac{\delta}{2} - x_0| = \frac{\delta}{2} < \delta$ und

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |(x_0 + \frac{\delta}{2})^2 - x_0^2| = |x_0^2 + x_0\delta + \frac{\delta^2}{4} - x_0^2| \\ &= |x_0\delta + \frac{\delta^2}{4}| = |1 + \frac{\delta^2}{4}| = 1 + \frac{\delta^2}{4} \geq 1 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Satz 5.3.3. (Satz von Heine)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f gleichmäßig stetig.

6 Differenzierbarkeit

Definition 6.1. (Differenzierbarkeit) Seien $a < b$ reelle Zahlen und $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

(a) Sei $x_0 \in (a, b)$ beliebig. f heißt differenzierbar in x_0 , falls

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

in \mathbb{R} existiert. In diesem Fall schreiben wir

$$f'(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

und nennen $f'(x_0)$ die Ableitung von f in x_0 .

(b) Wir sagen, dass f differenzierbar ist, falls f für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar im Sinne von (a) ist.

Bemerkung 6.2. Es gelten alle Rechenregeln, die man schon aus der Schule kennt, Kettenregel, Produktregel, Quotientenregel, usw:

(a) Seien f in x_0 und g in $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar. Dann ist $f \circ g$ in x_0 differenzierbar mit

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0)f'(x) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

(b) Dann ist $f \cdot g$ differenzierbar in x_0 mit

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0).$$

(c) Seien f, g in x_0 differenzierbar. Falls $g \neq 0$ ist f/g differenzierbar in x_0 mit

$$(f/g)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g(x_0)^2}$$

Beispiel 6.3. Sei $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $h(x) := x^x$. Dann ist

$$h(x) = x^x = e^{\ln(x^x)} = e^{x \ln(x)} = (g \circ f)(x)$$

mit $g(x) := e^x$ und $f(x) := x \ln(x)$. Es gilt mit der Produktregel

$$\begin{aligned} g'(x) &= e^x \\ f'(x) &= x \frac{1}{x} + 1 \cdot \ln(x) = 1 + \ln(x). \end{aligned}$$

für alle $x > 0$. Es folgt mit der Kettenregel

$$h'(x) = g'(f(x))f'(x) = g'(x \ln(x))(1 + \ln(x)) = e^{x \ln(x)}(1 + \ln(x)) = x^x(1 + \ln(x)).$$

$$h'(x) = \frac{d}{dx} x^x = \frac{d}{dx} e^{\ln(x^x)} = \frac{d}{dx} e^{x \ln(x)}$$

Bemerkung 6.4.

(a) Ist $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, dann ist f stetig. Die Umkehrung gilt nicht. Betrachte dazu $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := |x|$. f ist stetig in 0, aber nicht differenzierbar in 0 (wie letzte Woche in den Übungen gezeigt).

(b) Aus $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar folgt **nicht**, dass auch f' differenzierbar ist. Betrachte dazu etwa

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & x \geq 0 \\ -\frac{1}{2}x^2 & x < 0 \end{cases}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - x_0} &= \frac{\frac{1}{2}x^2}{x} = \frac{1}{2}x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - x_0} &= \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x} = -\frac{1}{2}x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

Also stimmen rechtsseitiger und linksseitiger Grenzwert überein und es gilt $f'(0) = 0$. Damit erhalten wir mit der Vorlesung

$$f'(x) = \begin{cases} -x & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ x & x > 0 \end{cases},$$

also $f'(x) = |x|$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und diese Funktion ist in 0 nicht differenzierbar.

(c) Ist $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, ist dann f' stetig auf (a, b) ? Nein, betrachte etwa

$$g(x) := \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$

Dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0,$$

da \sin beschränkt ist. Weiter erhalten wir mit der Kettenregel

$$g'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

$g'(x)$ ist nicht stetig in 0 (Übung).

Merke: f differenzierbar impliziert f stetig, macht aber zunächst keine Aussage über Eigenschaften von f' .

Definition 6.5. (stetige Differenzierbarkeit)

Sei $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir sagen f ist stetig differenzierbar, falls f differenzierbar ist und f' stetig.

Definition 6.6. (Höhere Ableitungen) Sei $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion (schreibe auch $f^{(0)} := f$). Falls $f^{(1)} := f'$ differenzierbar ist, schreiben wir $f^{(2)} := f'' := (f')'$ und nennen f'' die zweite Ableitung von f . Iterativ schreiben wir, falls $f^{(k-1)}$ differenzierbar ist, $f^{(k)}$ für die Ableitung von $f^{(k-1)}$ und nennen $f^{(k)}$ die k -te Ableitung von f , $k \in \mathbb{N}$. Wir sagen f ist k -mal stetig differenzierbar, falls f k -mal differenzierbar ist und $f^{(k)}$ stetig ist.

Bemerkung 6.7.

Man kann sich für $k \in \mathbb{N}$ merken:

f k -mal differenzierbar $\Rightarrow f$ $k-1$ -mal stetig differenzierbar $\Rightarrow f$ $k-1$ mal differenzierbar
 $\Rightarrow f, f^{(1)}, \dots, f^{(k-1)}$ stetig.

Spezialfall $k = 2$:

f 2-mal differenzierbar $\Rightarrow f$ stetig differenzierbar $\Rightarrow f$ differenzierbar $\Rightarrow f$ stetig.

Satz 6.8. (Satz von Rolle)

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b) mit $f(a) = f(b)$. Dann gibt es ein $c \in (a, b)$ mit $f'(c) = 0$.

Satz 6.9. (Mittelwertsatz)

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann gibt es ein $c \in (a, b)$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Bemerkung 6.10. (Folgerungen aus dem Mittelwertsatz)

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b) .

(a) Ist $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$, dann ist f konstant, d.h.

$$\exists c \in \mathbb{R} \quad \forall x \in [a, b] : f(x) = c.$$

(b) Falls $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a, b)$, dann ist f monoton wachsend auf $[a, b]$, d.h. für $a \leq x_1 \leq x_2 \leq b$ gilt $f(x_1) \leq f(x_2)$. Analog: Falls $f'(x) < 0$ für alle $x \in (a, b)$, so ist f monoton fallend auf $[a, b]$.

(c) Falls $|f'(x)| \leq M$ für ein $M > 0$ und alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, so ist f Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $M > 0$, d.h. für alle $x, y \in [a, b]$ gilt

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|.$$

Beispiel 6.11.

(a) Es gilt

$$\forall x \geq 0 : 1 + \frac{x}{2} \geq \sqrt{x+1}.$$

Definiere dazu $h : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$h(x) := 1 + \frac{x}{2} - \sqrt{x+1}, \quad x \in [0, \infty).$$

Dann ist

$$h'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0,$$

da $\sqrt{x+1} \geq 1$ und somit $-\frac{1}{\sqrt{x+1}} \geq -1$. Damit ist h nach Bemerkung 6.10 monoton wachsend auf $[0, \infty)$ und es gilt insbesondere für alle $x > 0$

$$1 + \frac{x}{2} - \sqrt{x+1} = h(x) > h(0) = 1 - \sqrt{0+1} = 0.$$

Umgestellt ergibt das

$$1 + \frac{x}{2} \geq \sqrt{x+1}.$$

- (b) Wir haben in den Übungen schon gezeigt, dass $\sin(x)$ Lipschitz-Stetig mit Lipschitz-Konstante 1 ist. Anderer Beweis: Es gilt $(\sin(x))' = \cos(x)$ und $|\cos(x)| \leq 1 =: M$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit ist nach Bemerkung 6.10 (c) $\sin(x)$ Lipschitz-Stetig mit Lipschitz-Konstante $M = 1$.

Satz 6.12. (Regeln von de l'Hospital)

Seien $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit $g'(x)(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Es gelte entweder $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a+} 0, g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a+} 0$ oder $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a+} \infty, g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a+} \infty$. Dann folgt

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

sofern die rechte Seite existiert. Eine analoge Aussage gilt für $x \rightarrow b-, x \rightarrow \infty, x \rightarrow -\infty$ (in den letzten beiden Fällen $f, g : (a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ bzw. $f, g : (-\infty, b) \rightarrow \mathbb{R}$).

Beispiel 6.13. (Anwendungen von l'Hospital)

- (a) Für jedes $\alpha > 0$ gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(x)}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0,$$

da $x^\alpha \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty$.

Merke: Der Logarithmus wächst langsamer als jede Potenz.

- (b) Seien $a > 0$ und $k \in \mathbb{N}$ beliebig.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^k}{e^{ax}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{kx^{k-1}}{ae^{ax}} = \underbrace{\dots}_{k\text{-mal}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{k!}{a^k e^{ax}} = 0.$$

Merke: Die Exponentialfunktion wächst schneller als jede Potenz von x .

- (c) Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos(x)}{2} = -\frac{1}{2},$$

da \cos stetig.

(d) Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = 1.$$

(e) Grenzwerte der Form $0 \cdot \infty$ oder Ähnliche können manchmal ebenso mit l'Hospital bestimmt werden:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0.$$

Allgemeiner gilt sogar $x^\alpha \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ für jedes $\alpha > 0$.

Beispiel 6.14. (l'Hospital geht schief)

Zweimaliges Anwenden von l'Hospital liefert

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Hier kommen wir also mit l'Hospital nicht weiter. Es gilt aber

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{e^x} e^x + e^{-x}}{\frac{1}{e^x} e^x - e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + e^{-2x}}{1 - e^{-2x}} = \frac{1 + 0}{1 - 0} = 1.$$

6.1 Lokale Extremstellen

Satz 6.15. (lokale Extremstellen) Sei $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. f hat in $x_0 \in (a, b)$ ein **lokales Maximum** (bzw. **lokales Minimum**), falls es ein $\delta > 0$ gibt, so dass $f(x_0) \geq f(x)$ (bzw. $f(x_0) \leq f(x)$) für alle $x \in (a, b)$ mit $|x - x_0| < \delta$.

(a) Falls $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$, so hat f in x_0 ein lokales Maximum.

(b) Falls $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$, so hat f in x_0 ein lokales Minimum.

Beispiel 6.16. Sei $f(x) := \frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1}$. Dann gilt

$$f'(x) = -(1+x^2)^{-2} \cdot 2x = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

Damit gilt $f'(x) = 0$ genau dann, wenn $x = 0$. Weiter erhalten wir mit der Quotientenregel

$$f''(x) = -\frac{2(1+x^2)^2 - 2x \cdot 2(1+x^2)2x}{(1+x^2)^4} = \frac{2(1+x^2)^2 - 8x^2(1+x^2)}{(1+x^2)^4}$$

Also gilt

$$f''(0) = -\frac{2(1+0)^2 - 0}{(1+0)^4} = -2 < 0.$$

Damit hat f ein lokales Maximum in $x_0 := 0$. Es gibt keine weiteren Extremstellen, da $f'(x) \neq 0$ für $x \neq x_0$

7 Integration

Definition 7.1. (Zerlegung, Partition)

Seien $a < b \in \mathbb{R}$. Eine Zerlegung mit ausgezeichneten Punkten

(bzw. Partition mit ausgezeichneten Punkten, oder kurz nur Zerlegung oder Partition) D von $[a, b]$ ist ein Tupel $D = (x_0, \dots, x_n, \xi_0, \dots, \xi_{n-1})$ mit $n \in \mathbb{N}$, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ und $\xi_j \in [x_j, x_{j+1}]$ für alle $j \in \{0, \dots, n-1\}$. Definiere weiter für jedes $j \in \{0, \dots, n-1\}$

$$\Delta x_j := x_{j+1} - x_j.$$

und $|D| := \max_{j \in \{0, \dots, n-1\}} \Delta x_j$

Definition 7.2. (Riemann-Summe)

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $D = (x_0, \dots, x_n, \xi_0, \dots, \xi_{n-1})$ eine Zerlegung von $[a, b]$ Setze

$$S(D) := \sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j) \Delta x_j.$$

$S(D)$ heißt Riemann-Summe (von f mit Zerlegung D).

Definition 7.3. (Riemann-Integral)

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es eine reelle Zahl s , so dass gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \text{Zerlegungen } D \text{ von } [a, b] : |D| < \delta \Rightarrow |S(D) - s| < \varepsilon.$$

s heißt Riemann-Integral von f auf $[a, b]$ und wir schreiben

$$\int_a^b f(x) dx := s.$$

Bemerkung 7.4.

Es gilt also: Für jede Folge $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Zerlegungen von $[a, b]$ mit $|D_n| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} S(D_n) = \int_a^b f(x) dx$.

Bemerkung 7.5. Das Riemann-Integral ist nur einer von vielen Integralbegriffen. Es gibt zum Beispiel noch das Lebesgue-Integral (Maßtheorie, Analysis 3, Stochastik), Lebesgue-Stieltjes-Integral, Stochastisches Integral, Bochner-Integral, ...

Beispiel 7.6.

Sei $b > 0$ beliebig. Definiere $f : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f(x) := x^2$ für jedes $x \in [0, b]$. Definiere $D_n := (x_0, \dots, x_n, \xi_0, \dots, \xi_{n-1})$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ durch

$$\begin{aligned} x_j &:= \frac{bj}{n}, \quad \forall j \in \{0, \dots, n\} \\ \xi_j &= x_j, \quad \forall j \in \{0, \dots, n-1\} \end{aligned}$$

Dann gilt $x_0 = 0$ und $x_n = b$ sowie $x_j < x_{j+1}$ sowie $\xi_j = x_j \in [x_j, x_{j+1}]$ für alle $j \in \{0, \dots, n-1\}$. Also ist $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Zerlegungen von $[a, b]$. Das ist die sogenannte äquidistante Zerlegung, da

$$\Delta x_j = x_{j+1} - x_j = \frac{(j+1)b}{n} - \frac{jb}{n} = \frac{b}{n},$$

unabhängig von $j \in \{0, \dots, n-1\}$ ist und somit alle Teilintervalle die gleiche Länge haben, d.h. es gilt

$$|D_n| = \max_{j \in \{0, \dots, n-1\}} \Delta x_j = \frac{b}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Damit erhalten wir nach Bemerkung 7.4

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} S(D_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} \Delta x_j f(\xi_j) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{b}{n} f(x_j) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b}{n} \sum_{j=0}^{n-1} x_j^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{b^2 j^2}{n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^3}{n^3} \sum_{j=0}^{n-1} j^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^3 (n-1)n(2n-1)}{n^3} && \text{(Aufgabe 1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^3 (2n^3 - 3n^2 - n)}{n^3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^3 (2n^3 - 3n^2 - n)}{6n^3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^3 (2 - \frac{3}{n} - \frac{1}{n^2})}{6} \\ &= \frac{2b^3}{6} = \frac{b^3}{3}. \end{aligned}$$

Man sieht also, dass die Berechnung von „einfachen“ Integralen mit der Definition schon recht umständlich ist.

Definition 7.7.

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Eine Funktion $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, die stetig und auf (a, b) differenzierbar ist, mit $F'(x) = f(x)$ heißt Stammfunktion von f .

Satz 7.8. (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann hat f eine Stammfunktion F (man kann immer $F(x) := \int_a^x f(x)dx$ nehmen), die eindeutig bestimmt ist bis auf die Addition mit einer reellen Konstanten. Es gilt dann

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Beispiel 7.9.

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := x^n$ für alle $x \in [a, b]$. Die Funktion $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $F(x) := \frac{x^{n+1}}{n+1}$ für alle $x \in [a, b]$ ist eine Stammfunktion von f . Damit gilt

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1} = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}.$$

Satz 7.10. (Substitutionsregel)

Sei $f : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $\varphi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ eine stetig differenzierbare Funktion, so gilt

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx \left(= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)dy \right).$$

Bemerkung 7.11.

Merke: Die Substitutionsregel kann dann hilfreich sein, wenn im Integral eine Funktion in Kombination mit etwas vorkommt, dass der Ableitung der Funktion ähnelt.

Bemerkung 7.12.

Oft wird für eine Stammfunktion F von f auch die Notation $F(x) = \int f(x)dx$ verwendet. Die Substitutionsregel besagt dann dass

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F(\varphi(x)),$$

da nach der Kettenregel

$$\frac{d}{dx}F(\varphi(x)) = F'(\varphi(x))\varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x).$$

Dies führt zu der folgenden Formulierung: Sei $z = z(x) := \varphi(x)$. Dann gilt $\frac{dz}{dx} := \frac{d}{dx}z = \varphi'(x)$. Tun wir jetzt so, als wären dz und dx Zahlen, dann können wir diese Gleichung mit dx multiplizieren und erhalten

$$dz = \varphi'(x)dx.$$

Daraus erhalten wir heuristisch

$$\int f(\varphi(x)) \underbrace{\varphi'(x)dx}_{=dz} = \int f(z)dz = F(z)(= F(\varphi(x))).$$

Beispiel 7.13. (Substitutionsregel mit festen Grenzen)

Sei $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := \sin(5x + 8)$ für alle $x \in [0, \pi]$. Wir wollen $\int_0^\pi f(x)dx$ bestimmen. Es gibt mehrere Möglichkeiten, hier Substitution zu verwenden.

- (a) Fasse das zu berechnende Integral als die rechte Seite der Substitutionsregel auf: Setze $\varphi(x) := \frac{x-8}{5}$. Dann gilt $\varphi'(x) = \frac{1}{5}$ und $\frac{b-8}{5} = \varphi(b) = \pi$, also $b = 5\pi + 8$, sowie $\frac{a-8}{5} = \varphi(a) = 0$, d.h. $a = 8$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_0^\pi f(x)dx &= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx \\ &= \int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx \\ &= \int_a^b \sin\left(5\frac{x-8}{5} + 8\right) \frac{1}{5}dx \\ &= \frac{1}{5} \int_a^b \sin(x)dx \\ &= \frac{1}{5} (-\cos(b) + \cos(a)) \\ &= \frac{1}{5} (-\cos(5\pi + 8) + \cos(8)) \end{aligned}$$

- (b) Fasse das zu berechnende Integral als die linke Seite der Substitutionsregel auf: Setze $g(x) := \sin(x)$ $\varphi(x) := 5x + 8$. Dann gilt $\varphi'(x) = 5$ und $\varphi(0) = 8$ sowie $\varphi(\pi) = 5\pi + 8$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_0^\pi f(x)dx &= \int_0^\pi \sin(5x + 8)dx = \frac{1}{5} \int_0^\pi \sin(5x + 8) \cdot 5dx \\ &= \frac{1}{5} \int_0^\pi g(\varphi(x))\varphi'(x)dx \\ &= \frac{1}{5} \int_{\varphi(0)}^{\varphi(\pi)} g(x)dx \\ &= \frac{1}{5} \int_8^{5\pi+8} \sin(x)dx \\ &= \frac{1}{5} (-\cos(5\pi + 8) + \cos(8)) . \end{aligned}$$

- (c) Heuristisch: Setze $z = z(x) := 5z + 8$. Dann ist $\frac{dz}{dx} = 5$, somit $dz = 5dx$ und $\frac{1}{5}dz = dx$. Damit gilt

$$\int_0^\pi f(x)dx = \int_0^\pi \sin(5x + 8)dx = \int_{y(a)}^{y(b)} \sin(y) \frac{1}{5}dy = \frac{1}{5} \int_8^{5\pi+8} \sin(y)dy .$$

Beispiel 7.14. (Substitutionsregel zur Bestimmung von Stammfunktionen, nützlich für die Anwendung)

- (a) Betrachte noch einmal $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := \sin(5x + 8)$ für alle $x \in [0, \pi]$. Wir wollen $\int f(x)dx$ bestimmen. Setze $z = 5x + 8$, dann gilt $\frac{dz}{dx} = 5$, also $dx = \frac{1}{5}dz$ und somit

$$\begin{aligned} \int f(x)dx &= \int \sin(5x + 8)dx = \int \sin(z) \frac{1}{5}dz \\ &= -\frac{1}{5} \cos(z) = -\frac{1}{5} \cos(5x + 8) . \end{aligned}$$

(b) Es gilt mit $z = 2x + 3$ und somit $dx = \frac{1}{2}dz$

$$\int \frac{1}{2x+3} dx = \int \frac{1}{z} \frac{1}{2} dz = \frac{1}{2} \log(z) = \frac{1}{2} \log(2x+3).$$

(c) Es gilt mit $z = x^2$ und somit $dx = \frac{1}{2x} dz$

$$\int x e^{-x^2} dx = \int x e^{-z} \frac{1}{2x} dz = \int \frac{1}{2} e^{-z} dz = -\frac{1}{2} e^{-z} = -\frac{1}{2} e^{-x^2}$$

Satz 7.15. (partielle Integration)

Sind $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zwei stetig differenzierbare Funktionen, dann gilt

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

Bemerkung 7.16.

Merke: Die partielle Integration kann dann hilfreich sein, wenn der Integrand in Produktform ist und man die Stammfunktion eines der Faktoren kennt.

Beispiel 7.17. (partielle Integration mit festen Grenzen)

Sei $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := e^x \cdot x$ für alle $x \in [0, 1]$. Setze $f(x) := e^x$ und $g(x) = x$. Dann gilt $f'(x) = e^x$ und $g'(x) = 1$ und es folgt mit partieller Integration

$$\begin{aligned} \int_0^1 h(x)dx &= \int_0^1 e^x \cdot x dx = \int_0^1 f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(x)g'(x)dx \\ &= e^x \cdot x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx \\ &= e - (e - 1) = 1. \end{aligned}$$

Bemerkung 7.18.

Analog zur Substitutionsregel kann man die partielle Integration informell so formulieren:

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx.$$

Dies ergibt sich direkt aus der Produktregel $\frac{d}{dx}f(x)g(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$ und Stammfunktion bilden auf beiden Seiten

$$f(x)g(x) = \int \frac{d}{dx}f(x)g(x)dx = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx.$$

Beispiel 7.19. (partielle Integration zur Bestimmung von Stammfunktionen, nützlich für die Anwendung)

(a) Betrachte die Funktion $f(x) := x \ln(x)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int x \ln(x) &= \frac{1}{2}x^2 \ln(x) - \int \frac{1}{2}x^2 \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 \ln(x) - \int \frac{x}{2} dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 \ln(x) - \frac{1}{4}x^2 \end{aligned}$$

(b) Es gilt einerseits

$$\begin{aligned} \int x^2 e^{-x^2} dx &= \frac{1}{3} x^3 e^{-x^2} - \int \frac{1}{3} x^3 (-2x) e^{-x^2} dx \\ &= \frac{1}{3} x^3 e^{-x^2} + \int \frac{2}{3} x^4 e^{-x^2} dx \\ &= \frac{1}{3} x^3 e^{-x^2} + \frac{2}{15} x^5 e^{-x^2} - \int \frac{2}{15} x^5 (-2x) e^{-x^2} dx \\ &= \frac{1}{3} x^3 e^{-x^2} + \frac{2}{15} x^5 e^{-x^2} + \frac{2}{15} x^6 e^{-x^2} dx \dots \end{aligned}$$

Auf diesem Weg kommen wir mit partieller Integration nicht weiter. Man kann jedoch auch anders partiell integrieren (unter Zuhilfenahme von Beispiel 7.14):

$$\begin{aligned} \int x^3 e^{-x^2} dx &= \int x^2 (x e^{-x^2}) dx = x^2 \left(-\frac{1}{2} e^{-x^2}\right) - \int 2x \left(-\frac{1}{2} e^{-x^2}\right) dx \\ &= -\frac{1}{2} x^2 e^{-x^2} + \int x e^{-x^2} dx \\ &= -\frac{1}{2} x^2 e^{-x^2} - \frac{1}{2} e^{-x^2} = -\frac{1}{2} e^{-x^2} (x^2 + 1). \end{aligned}$$

Dieser Weg ist zielführend, falls die Potenz von x ungerade ist, also $x^3 e^{-x^2}, x^5 e^{-x^2}, \dots$, allerdings nicht, falls die Potenz von x gerade ist, also $x^2 e^{-x^2}, x^4 e^{-x^2}, \dots$ (Problem: Stammfunktion von e^{-x^2} finden geht mit üblichen Integrationstechniken nicht wirklich)

(c) Es gilt einerseits

$$\begin{aligned} \int \sin^2(x) dx &= \int \sin(x) \sin(x) dx \\ &= -\cos(x) \sin(x) + \int \cos^2(x) dx \\ &= -\cos(x) \sin(x) + \sin(x) \cos(x) + \int \sin^2(x) dx \\ &= \int \sin^2(x) dx. \end{aligned}$$

Auf diese Weise kommen wir hier also nicht weiter. Andererseits kann man ein Additionstheorem verwenden:

$$\begin{aligned} \int \sin^2(x) dx &= \int \sin(x) \sin(x) dx \\ &= -\cos(x) \sin(x) + \int \cos^2(x) dx \\ &= \cos(x) \sin(x) + \int 1 - \sin^2(x) dx \\ &= \cos(x) \sin(x) + x - \int \sin^2(x) dx. \end{aligned}$$

Stellen wir das um, so ergibt sich

$$\int \sin^2(x) = -\frac{1}{2} \cos(x) \sin(x) + \frac{1}{2} x.$$

(d) Es gilt

$$\int \ln(x) dx = \int 1 \cdot \ln(x) dx = x \ln(x) - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln(x) - x = x(\ln(x) - 1).$$

(e) Es gilt mit $z = 1 + x^2$ und somit $dx = \frac{1}{2x} dz$

$$\begin{aligned} \int \arctan(x) dx &= \int 1 \cdot \arctan(x) dx \\ &= x \arctan(x) - \int x \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= x \arctan(x) - \int x \frac{1}{z} \frac{1}{2x} dz \\ &= x \arctan(x) - \int \frac{1}{2} \frac{1}{z} dz \\ &= x \arctan(x) - \frac{1}{2} \log(z) \\ &= x \arctan(x) - \frac{1}{2} \log(1+x^2). \end{aligned}$$

8 Vertauschen von Integral und Limes

Sei $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktionenfolge, die gleichmäßig oder punktweise gegen eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert. In diesem Abschnitt wollen wir klären, wann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Problem: Haben Integral auf der rechten Seite vielleicht gar nicht definiert? (nur im Fall von glm. Konvergenz ist f auch sicher stetig).

Satz 8.1.

Seien $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ($n \in \mathbb{N}$) und die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiere gleichmäßig gegen eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Satz 8.2.

Seien $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ($n \in \mathbb{N}_0$) und die Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} f_j$ konvergiere gleichmäßig. Dann gilt

$$\sum_{j=0}^{\infty} \int_a^b f_j(x) dx = \int_a^b \sum_{j=0}^{\infty} f_j(x) dx.$$

Beispiel 8.3.

Betrachte

$$\begin{aligned}
 \int_a^b e^x dx &= \int_a^b \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} dx \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} \int_a^b \frac{x^j}{j!} dx && \text{(Vertauschungssatz für Reihen)} \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \int_a^b x^j dx \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \frac{b^{j+1} - a^{j+1}}{j+1} \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{b^{j+1} - a^{j+1}}{(j+1)!} \\
 &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{b^j - a^j}{j!} && \text{(Indexshift, Bemerkung 1.1.6)} \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{b^j - a^j}{j!} && \text{(Summand für } j=0 \text{ ist gleich 0)} \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{b^j}{j!} - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a^j}{j!} \\
 &= e^b - e^a
 \end{aligned}$$

Hier konnten wir den Vertauschungssatz anwenden, da die Exponentialreihe $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}$ gleichmäßig auf jedem Intervall $[a, b]$ konvergiert (das haben wir mit dem Weierstraß-Majorantenkriterium gemacht). Wiederholung: Mit $f_j(x) := \frac{x^j}{j!}$ für jedes $j \in \mathbb{N}_0$ gilt mit $M := \max\{|a|, |b|\}$

$$|f_j(x)| = \left| \frac{x^j}{j!} \right| = \frac{|x|^j}{j!} \leq \frac{M^j}{j!} =: b_j,$$

für alle $x \in [a, b]$. Wegen

$$\sum_{j=0}^{\infty} b_j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{M^j}{j!} = \exp(M) = e^M < \infty,$$

konvergiert die Reihe

$$\sum_{j=0}^{\infty} f_j(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}$$

gleichmäßig auf $[a, b]$.

9 Wiederholung

9.1 Wichtig aus Kapitel 1

Induktion, Definition Binomialkoeffizient, Binomischer Lehrsatz, komplexe Zahlen

9.2 Folgen

- (1) Definition Konvergenz: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon .$$

- (2) Definition Cauchy-Folge: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \geq n_0 : |a_n - a_m| < \varepsilon .$$

- (2) Eigenschaften von Folgen:

- (a) monoton und beschränkt impliziert konvergent.
- (b) konvergent genau dann wenn Cauchy-Folge .
- (c) Grenzwertsätze: $a_n + b_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a + b$ falls $(a_n), (b_n)$ konvergent.
- (d) Konvergent impliziert beschränkt
- (e) ...

- (4) Teilfolgen und Häufungspunkte. Definition Teilfolge, Definition Häufungspunkt. Folge konvergiert genau dann, wenn beschränkt und genau ein Häufungspunkt. Satz von Bolzano-Weierstraß.

- (5) Definition Äquivalenzrelation (nicht so wichtig wie der Rest, kann theoretisch auch in der Klausur kommen, ist aber dankbar).

- (6) Wichtige Folgen: $(1 + \frac{x}{n})^n$, q^n , $\frac{1}{n}$, Quotienten von Polynomen in n , z.B. $\frac{n^2+3n+2}{10n^2-100n+1}$, $x^{\frac{1}{n}}$, ...

9.3 Reihen:

- (1) Definition Reihe, Definition Konvergenz von Reihen. Schreibweise $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ sowohl für den Grenzwert der Reihe, als auch stellvertretend für die Partialsummenfolge von (a_n) .

- (2) Konvergenzkriterien:

- (a) Majorantenkriterium
- (b) Leibnitz-Kriterium
- (c) Wurzelkriterium
- (d) Quotientenkriterium

- (3) Definition absolute Konvergenz, absolute Konvergenz impliziert „normale“ Konvergenz, alle Umordnungen konvergieren gegen denselben Grenzwert falls absolut konvergent.
- (4) Vertauschen von Grenzwerten und Reihen: monotone Konvergenz, majorisierte (bzw. dominierte) Konvergenz, Satz über Doppelreihen.
- (5) Wichtige Beispiele für Reihen:

$$\sum_{j=0}^{\infty} q^j = \frac{1}{1-q} \quad (|q| < 1, \text{ geometrische Reihe})$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} = \exp(x) = e^x \quad (\forall x \in \mathbb{R}, \text{ Exponentialreihe})$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \quad (\alpha > 1 \text{ allgemeine harmonische Reihe})$$

9.4 Reelle Funktionen

- (1) Definition Funktion, Definition Injektivität, Surjektivität, Bijektivität, Verkettung von Funktionen, Monotonie, Intervalle
- (2) Umkehrabbildung genau dann, wenn bijektiv.
- (3) Wichtige Funktionen $\exp(x) = e^x$ (mit Rechenregeln), $\sin(x)$, $\cos(x)$, \log (mit Rechenregeln), konstante Funktionen, Polynome, ...

9.5 Stetigkeit und gleichmäßige Stetigkeit

- (1) Definition Stetigkeit und Unterschied zur Definition der gleichmäßigen Stetigkeit. **Folgenkriterium für Stetigkeit.**
- (2) Verkettung, Umkehrfunktion (falls sie existiert), Summe, Produkt, ... stetiger Funktionen sind ebenfalls stetig.
- (3) Stetige Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen. Sie erfüllen
 - (a) den Zwischenwertsatz
 - (b) nehmen Minimum und Maximum an
 - (c) sind beschränkt
 - (d) sind sogar gleichmäßig stetig.
- (4) Grenzwerte von Funktionen.

9.6 Funktionenfolgen und -reihen

- (a) Definition punktweise und gleichmäßige Konvergenz und Unterschied der beiden.
- (b) Weierstraß-Majorantenkriterium

9.7 Differenzierbarkeit

- (1) Definition der Ableitung über den Differenzenquotient.
- (2) Höhere Ableitungen, stetig differenzierbar, Zusammenhang mit Stetigkeit, welche Implikationen gelten?
 f 2-mal differenzierbar $\Rightarrow f$ stetig differenzierbar $\Rightarrow f$ differenzierbar $\Rightarrow f$ stetig.
- (3) Rechenregeln für Ableitungen: Summen ableiten, Produktregel, Kettenregel, Quotientenregel. Ableitungen der Funktionen e^x , $\cos(x)$, $\sin(x)$, $\tan(x)$, x^α , inverse trigonometrische Funktionen, ... Trick: $x^x = e^{\log(x^x)}$ oder allgemein $p = e^{\log(p)}$.
- (4) Mittelwertsatz der Differentialrechnung und Satz von Rolle.
- (5) l'Hospital.
- (6) Bestimmen lokaler Extrema mit erster und zweiter Ableitung.

9.8 Integration

- (1) Stammfunktionen, Hauptsatz der Differential und Integralrechnung
- (2) Mittelwertsatz der Integralrechnung.
- (3) Rechenregeln für Integrale (Dreiecksungleichung, Monotonie, Summe unter Integral = Summe der Einzelintegrale, ...)
- (4) Bestimmung von Stammfunktionen, Substitutionsregel, Partielle Integration, mit oder ohne feste Grenzen.
- (5) Stammfunktionen der elementaren Funktionen e^x , $\cos(x)$, $\sin(x)$, $\tan(x)$, x^α , inverse trigonometrische Funktionen, ...
- (5) **NICHT KLAUSURRELEVANT:** Integration der Partialbrüche und Euler-Substitutionen (da nicht in Vorlesung behandelt).
- (6) Vertauschungssätze
- (7) Voraussichtlich Uneigentliche Integrale

9.9 Potenzreihen und Taylorreihen

Nächste Woche.

10 Potenzreihen und Taylorreihen

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Wir wollen prüfen für welche $x \in \mathbb{R}$ die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

konvergiert.

Satz 10.1.

Sei $\rho := \sup \{|x - x_0| \mid x \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \text{ konvergiert.}\}$. ρ heißt Konvergenzradius und es gilt

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

(Hier nehmen wir die Konvention $\frac{1}{0} := \infty$ und $\frac{1}{\infty} := 0$). Weiter gilt

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

falls $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und sofern dieser Limes existiert.

Dann gilt

- (a) Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ konvergiert absolut auf $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$
- (b) Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ konvergiert gleichmäßig auf $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ für jedes $\delta < \rho$.
- (c) Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ divergiert auf $\mathbb{R} \setminus (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$.
- (d) Über die Konvergenz der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ bei $x = x_0 \pm \rho$ kann keine Aussage getroffen werden.

Beispiel 10.2.

Sei $a_n := \frac{n^2}{2^n}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gilt einerseits

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \left(\frac{n^2}{2^n} \right)^{\frac{1}{n}} = \frac{n^{\frac{2}{n}}}{2} = \frac{e^{\frac{2}{n} \log(n)}}{2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{e^0}{2} = \frac{1}{2}.$$

Somit $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{2}$ und damit $\rho = 2$. Andererseits gilt auch

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| &= \frac{\frac{n^2}{2^n}}{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}} \\ &= \frac{2}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^2} \\ &= \frac{2}{\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right)} \\ &= \frac{2}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2}{1} = 2. \end{aligned}$$

Satz 10.3.

Sei $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Falls es ein $x_0 \in (a, b)$ und $\delta > 0$ gibt, mit

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) : \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

so ist $a_n = f^{(n)}(x_0)/n!$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ so heißt f analytisch in x_0 . Insbesondere ist f beliebig oft differenzierbar.

Bemerkung 10.4. Nicht jede beliebig differenzierbare Funktion f ist auch analytisch. Es gilt also f analytisch $\Rightarrow f$ beliebig oft differenzierbar aber die Umkehrung gilt nicht, was folgendes Beispiel zeigt.

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$

Man kann zeigen, dass f beliebig oft differenzierbar ist mit $f^{(n)}(0) = 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Damit gilt für die Taylor-Reihe in 0

$$T(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} (x - 0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0}{n!} (x - 0)^n = 0.$$

Wegen $f(x) > 0$ für alle $x \neq 0$ gilt also $T(x) \neq f(x)$ für alle $x \neq 0$. Somit gibt es kein $\delta > 0$ mit $T(x) = f(x)$ auf $(-\delta, \delta)$ und f ist per Definition nicht analytisch.

Definition 10.5.

Sei $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar und $x_0 \in (a, b)$ beliebig. Die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

heißt Taylor-Reihe von f im Entwicklungspunkt x_0 . Falls $x_0 = 0$, nennt man die Taylor-Reihe von f in x_0 oft auch Maclaurin-Reihe.

Beispiel 10.6. (Exponentialfunktion)

Nach Vorlesung wissen wir bereits, dass

$$\forall x \in \mathbb{R} : e^x = \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

- (a) Setzen wir $a_n := \frac{1}{n!}$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ und $x_0 := 0$, so erhalten wir

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

und somit ist nach Satz 10.3 $a_n = \frac{\exp^{(n)}(0)}{n!}$, was auch unmittelbar klar ist, da

$$\exp^{(n)}(x) = \exp(x)$$

und somit $\exp^{(n)}(0) = \exp(0) = 1$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$.

- (b) Man kann die Taylor-Reihe von $\exp(x)$ auch in einem anderen x_0 ausrechnen: Nehme etwa $x_0 = y$ mit beliebigem aber festen $y \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \frac{\exp^{(n)}(y)}{n!} = \frac{\exp(y)}{n!} = \frac{e^y}{n!}$$

und somit

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp^{(n)}(y)}{n!} (x - y)^n \\ &= e^y \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x - y)^n}{n!} \\ &= e^y e^{x-y} = e^x. \end{aligned}$$

Also stimmt die Taylor-Reihe im Entwicklungspunkt $x_0 = y$ auch mit $\exp(x)$ überein. Man kann den Konvergenzradius natürlich auch herkömmlich ausrechnen. Es gilt

$$\left| \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} \right| = n + 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty,$$

d.h. $\rho = \infty$.

Zusammengefasst: Die Taylor-Reihe zu $\exp(x)$ im Entwicklungspunkt $x_0 \in \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp(x_0)}{n!} (x - x_0)^n,$$

und konvergiert auf ganz \mathbb{R} gegen $\exp(x)$ (wie in der Vorlesung gesehen), d.h. der Konvergenzradius ist $\rho = \infty$. Gleichmäßige Konvergenz liegt auf jedem reellen Intervall vor, aber nicht auf ganz \mathbb{R} , nach Satz 10.1, bzw. wie auch schon analog (bis auf Verschiebung um x_0) explizit in der Vorlesung (für $\exp(x)$) und den Übungen (für $\sin(x)$) gesehen (Machen wir vielleicht morgen).

Beispiel 10.7. (Maclaurin-Reihe der Kosinus-Funktion)

Nach Vorlesung wissen wir bereits, dass

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad \cos(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} = 1 \cdot x^0 + (-1)^1 \frac{x^2}{2!} + (-1)^2 \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Wir bringen dies in Verbindung mit Taylor: Idee: Erweitere diese Darstellung mit Nullen, um eine Potenzreihe zu bekommen:

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} &= 1 \cdot x^0 + (-1)^1 \frac{x^2}{2!} + (-1)^2 \frac{x^4}{4!} + \dots \\ &= 1 \cdot x^0 + 0 \cdot x^1 + (-1)^1 \frac{x^2}{2!} + 0 \cdot x^3 + (-1)^2 \frac{x^4}{4!} + \dots \end{aligned}$$

Formal: Setze für jedes $n \in \mathbb{N}_0$

$$a_n := \begin{cases} \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{n!} & n \text{ gerade} \\ 0 & n \text{ ungerade} \end{cases}.$$

Dann gilt für gerades $n = 2m \in \mathbb{N}_0$

$$a_n x^n = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{n!} x^n = \frac{(-1)^m}{(2m)!} x^{2m}$$

und es folgt mit $x_0 := 0$

$$\begin{aligned} \cos(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} = \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ gerade}}}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n. \end{aligned}$$

Nach Satz 10.3 gilt dann für jedes gerade $n \in \mathbb{N}_0$, dass

$$\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{n!} a_n = \frac{\cos^{(n)}(0)}{n!}$$

Also $\cos^{(n)}(0) = (-1)^{\frac{n}{2}}$ sowie $0 = a_n = \frac{\cos^{(n)}(0)}{n!}$, d.h. $\cos^{(n)}(0) = 0$ für jedes ungerade $n \in \mathbb{N}_0$. Dies können wir auch unmittelbar nachprüfen indem wir $\cos(x)$ differenzieren.

Beispiel 10.8.

Sei $f(x) := \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}$. Wir wollen die Taylor-Reihe von f im Entwicklungspunkt $x_0 = 2$ bestimmen und sie auf Konvergenz prüfen. Dazu müssen wir zunächst die n -te Ableitung f bestimmen. Es gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= -x^{-2} = (-1)^1 \frac{1}{x^2} \\ f''(x) &= 2x^{-3} = (-1)^2 2 \frac{1}{x^{2+1}} \\ f'''(x) &= -6x^{-4} = (-1)^3 3! \frac{1}{x^{3+1}} \end{aligned}$$

Wir vermuten

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}.$$

Beweis durch Induktion nach $n \in \mathbb{N}$.

IA: $n = 1$: Schon oben gezeigt.

IS: $n \mapsto n + 1$: Es gilt

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{d}{dx} f^{(n)}(x) \\ &= \frac{d}{dx} (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}} \\ &= (-1)^n n! - (n+1)x^{-(n+1)-1} \\ &= (-1)^{n+1} (n+1)! x^{-(n+2)} \\ &= (-1)^{n+1} \frac{(n+1)!}{x^{(n+1)+1}}. \end{aligned} \tag{IV}$$

Für $x_0 = 2$ ergibt sich

$$f^{(n)}(x_0) = (-1)^n \frac{n!}{x_0^{n+1}} = (-1)^n \frac{n!}{2^{n+1}}.$$

Somit ist die Taylorreihe von f im Entwicklungspunkt $x_0 = 2$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \frac{n!}{2^{n+1}}}{n!} (x - 2)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (x - 2)^n \\ &=: \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - 2)^n. \end{aligned}$$

Es gilt

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{2^{n+1}}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt[n]{2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}.$$

Also ist der Konvergenzradius ρ gegeben durch

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = 2.$$

Die Reihe konvergiert also auf $(x_0 - \rho, x_0 + \rho) = (0, 4)$ und divergiert auf $\mathbb{R} \setminus (0, 4)$. In den Randpunkten $x \in \{0, 4\}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (4 - 2)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} 2^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (0 - 2)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

also divergiert die Reihe auch für $x \in \{0, 4\}$.

Satz 10.9. (Taylor-Entwicklung mit Integral-Restterm)

Sei $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ $k + 1$ -mal stetig differenzierbar, $k \in \mathbb{N}_0$ und $x_0 \in (a, b)$ beliebig. Dann gilt

$$\forall x \in (a, b) : f(x) = \sum_{n=0}^k \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t) dt.$$

Der Term $\int_{x_0}^x \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t) dt$ heißt (Integral-)Restterm.

Bemerkung 10.10. Man kann die Taylor-Entwicklung auch mit anderen Resttermen formulieren, siehe Satz 3 im Skript.

11 Uneigentliche Integration

Definition 11.1. (Uneigentliches Integral)

Sei $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, also f stetig auf $[a + \varepsilon, b]$ für jedes $\varepsilon > 0$. Setze

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx.$$

Falls die rechte Seite existiert, nennen wir f über $(a, b]$ uneigentlich integrierbar und $\int_a^b f(x) dx$ das uneigentliche Integral von f über $(a, b]$.

Analog für $[a, b)$

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx,$$

und

$$\int_a^\infty f(x) dx := \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \int_a^\varepsilon f(x) dx$$

sowie

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx := \lim_{\varepsilon \rightarrow -\infty} \int_\varepsilon^b f(x) dx.$$

Beispiel 11.2.

Sei $\alpha > 0$ mit $\alpha \neq 1$ beliebig. Wir wollen prüfen ob

$$\int_1^\infty x^{-\alpha} dx$$

existiert. Es gilt für $\varepsilon > 1$

$$\int_1^\varepsilon x^{-\alpha} dx = -\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \Big|_1^\varepsilon = \frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}.$$

Wegen

$$\varepsilon^{1-\alpha} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow \infty} \begin{cases} \infty & \alpha < 1 \\ 0 & \alpha > 1 \end{cases}$$

ergibt sich, dass f uneigentlich integrierbar ist genau dann, wenn $\alpha > 1$ und in diesem Fall gilt

$$\int_1^\infty x^{-\alpha} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \int_1^\varepsilon x^{-\alpha} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \left(\frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \right) = -\frac{1}{1-\alpha} > 0.$$

Man kann auch für $\alpha = 1$ nachprüfen (Stammfunktion von x^{-1} ist $\log(x)$), dass $f(x) = x^{-1}$ nicht uneigentlich integrierbar ist.

Beispiel 11.3.

Wir wollen prüfen, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\alpha \neq -1$

$$\int_0^1 x^\alpha \ln(x) dx$$

existiert, d.h. gilt, dass $f(x) := x^\alpha \ln(x)$ auf $(0, 1]$ uneigentlich integrierbar ist. Dazu verwenden wir partielle Integration: Es gilt für $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \int_\varepsilon^1 x^\alpha \ln(x) dx &= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \ln(x) \Big|_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \frac{1}{x} dx && \text{(partielle Integration)} \\ &= 0 - \frac{1}{\alpha+1} \varepsilon^{\alpha+1} \ln(\varepsilon) - \frac{1}{\alpha+1} \int_\varepsilon^1 x^\alpha dx \\ &= -\frac{1}{\alpha+1} \varepsilon^{\alpha+1} \ln(\varepsilon) - \frac{1}{(\alpha+1)^2} (1 - \varepsilon^{\alpha+1}) \\ &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 - \frac{1}{(\alpha+1)^2} (1 - 0) = -\frac{1}{(\alpha+1)^2} && (\alpha > -1) \end{aligned}$$

da wegen l'Hospital, falls $\alpha > -1$

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{\alpha+1} \ln(\varepsilon) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(\varepsilon)}{\varepsilon^{-(\alpha+1)}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\varepsilon}}{-(\alpha+1)\varepsilon^{-(\alpha+1)-1}} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{-(\alpha+1)\varepsilon^{-(\alpha+1)}} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon^{\alpha+1}}{-(\alpha+1)} \\ &= 0. && (\alpha+1 > 0) \end{aligned}$$

Falls $\alpha < -1$ divergiert $x^{\alpha+1} \ln(\varepsilon)$ gegen $-\infty$ und somit ist f in diesem Fall auf $(0, 1]$ nicht uneigentlich integrierbar.

12 Einschätzung der Übungsaufgaben

Hinter den wichtigen Aufgaben steht ein „A“, falls die Aussage der Aufgabe relevant ist, und „L“, falls der Lösungsweg relevant ist. Alle Angaben ohne Gewähr.

- (1) **Sehr wichtig:** 1(L), 13(A), 14(L), 23(A), 24(A), 43(A,L), 44(L), 46(L), 48(L), 49(L), 50(L,A), 56(L), 58(L), 59(L), 60(L), 63(L), 64(L), 72(L), 73(L), 74(L), 75(L), 76-78 (L, ohne Partialbruchzerlegung und Euler-Substitution)
- (2) **Wichtig:** 9(L,A), 10(A), 25(L), 26(A), 32(A), 33(A), 34(L), 35(L), 36(L), 37(L), 38(L), 41(A), 51(L), 52(L,A), 53(L), 54(L), 55(L), 57(L), 61(L), 62(L), 68(L), 69(L,A), 70(L), 71(A),
- (3) **Nicht so wichtig:** 4, 31, 39, 40,45, 47, 67
- (4) **Gar nicht wichtig:** 2,3, 5,6,7,8, 11, 15,16,17,18, 19, 20, 21, 22, 27,28,29,30

13 Letzte Wiederholung

Beispiel 13.1. (Stetigkeit, Probeklausur, Aufgabe 3) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L > 0$, d.h. es gilt

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

Dann ist f gleichmäßig stetig. Zu zeigen ist:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R} : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Sei also $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $\delta > 0$ so, dass $\delta L < \varepsilon$, also $\delta < \varepsilon/L$. Dann gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|x - y| < \delta$

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| = L\delta < \varepsilon.$$

Beispiel 13.2. (Nochmal Taylor) Wir wollen die Taylorreihe von $f(x) := \frac{1}{1+x^2}$ bestimmen. Dazu bemerken wir, dass für $|x| < 1$

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{j=0}^{\infty} (-x^2)^j = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j x^{2j} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

mit

$$a_n := \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} & n \text{ gerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Also gilt für jedes $0 < \delta < 1$ mit $x_0 := 0$, dass

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

und somit folgt mit Satz 10.3. dass

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = a_n = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} & n \text{ gerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Also ergibt sich für die Taylorreihe von f in $x_0 = 0$

$$T(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j x^{2j}.$$

Wir wollen noch prüfen, wo $T(x)$ termweise differenziert werden darf. Dazu prüfen wir Satz 2 der Vorlesung nach, der uns sagt, dass wir überall dort termweise differenzieren dürfen, wo die Reihe konvergiert. Wir müssen also zunächst den Konvergenzradius bestimmen. Es gilt

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} \sqrt[n]{1} = 1 & n \text{ gerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Also ist $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ und somit $\rho = 1$. Nach Satz 2 der Vorlesung darf damit $T(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ termweise abgeleitet werden. Überall sonst konvergiert die Reihe nicht (für $x = \pm 1$ prüft man dies separat nach) und kann daher auch nicht termweise differenziert werden, da nicht wohldefiniert.

Beispiel 13.3. (Nochmal Konvergenzradius)

Bestimme den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^{n^2}.$$

Dazu beobachten wir

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^{n^2} &= 0 \cdot x^0 + 1 \cdot x^1 + 4 \cdot x^4 + 9 \cdot x^9 + \dots \\ &= 0 \cdot x^0 + 1 \cdot x^1 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 + 4 \cdot x^4 + 0 \cdot x^5 + 0 \cdot x^6 + 0 \cdot x^7 + 0 \cdot x^8 + 9 \cdot x^9 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \end{aligned}$$

mit

$$a_n := \begin{cases} n & n \text{ ist eine Quadratzahl} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Der Konvergenzradius ergibt sich direkt durch die Betrachtung von

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} \sqrt[n]{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 & n \text{ ist eine Quadratzahl} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

als $\rho = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = 1$.

Definition 13.4. (Nochmal glm. Konvergenz)

Sei $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Folge von Funktionen und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine weitere Funktion.

- (a) Wir sagen, dass f_n punktweise gegen f konvergiert (Schreibweise: $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$ punktweise), falls

$$\forall x \in A \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

oder anders ausgedrückt: $\forall x \in A : f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(x)$.

oder nochmal anders ausgedrückt: Die reelle Folge $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert mit $n \rightarrow \infty$ gegen $f(x)$.

Merke: Bei punktweiser Konvergenz darf n_0 von $x \in A$ und $\varepsilon > 0$ abhängen.

- (b) Wir sagen, dass f_n gleichmäßig gegen f konvergiert, (Schreibweise: $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{glm}} f$), falls

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall x \in A : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Merke: Bei gleichmäßiger Konvergenz darf n_0 von $\varepsilon > 0$ abhängen, aber **nicht** von $x \in A$.

Satz 13.5. (Wichtige Aussagen im Zusammenhang mit gleichmäßiger Konvergenz)

- (a) Falls f_n stetig und $f_n \rightarrow f$ gleichmäßig, dann ist auch f stetig.
- (b) Weierstraßsches Majorantenkriterium: $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen und $|f_j(x)| \leq b_j$ für alle $x \in A$ und alle $j \in \mathbb{N}_0$. Falls $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ konvergiert, dann konvergiert $\sum_{j=0}^{\infty} f_j$ gleichmäßig.

14 Aufgaben zur Wiederholung

Aufgabe 14.1.

Zeigen sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: $8^n - 5^n$ ist durch 3 teilbar.

Lösung: Wir verwenden Induktion über $n \in \mathbb{N}$.

IA: $n = 1$: Es gilt $8^n - 5^n = 8 - 5 = 3$ ist durch 3 teilbar.

IV: Sei also $8^n - 5^n$ für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$ durch 3 teilbar, d.h. es gibt ein $k \in \mathbb{N}$ mit $8^n - 5^n = 3k$.

IS: $n \mapsto n + 1$: Zu zeigen ist:

$$\exists m \in \mathbb{N} : 8^{n+1} - 5^{n+1} = 3m.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
 8^{n+1} - 5^{n+1} &= 8^n \cdot 8 - 5^n \cdot 5 \\
 &= 8^n(3 + 5) - 5^n \cdot 5 \\
 &= 8^n \cdot 5 - 5^n \cdot 5 + 8^n \cdot 3 \\
 &= 5 \cdot (8^n - 5^n) + 8^n \cdot 3 \\
 &= 5 \cdot 3k + 8^n \cdot 3 \\
 &= 3 \underbrace{(5k + 8^n)}_{=:m} \\
 &= 3m.
 \end{aligned}
 \tag{IV}$$

Aufgabe 14.2.

Sei die reelle Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiert durch

$$a_n := \frac{1}{2} \sum_{j=0}^n \left(\frac{n+2}{n}\right)^{-\frac{n}{2}} \frac{2^j}{j!}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Prüfe, ob die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert und bestimme ggf. den Grenzwert.

Hinweis: Diese Aufgabe prüft Stetigkeit, Grenzwertsätze und Wissen über die Exponentialreihe sowie die Folge $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ für reelles x .

Lösung: Zunächst gilt

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^n \left(\frac{n+2}{n}\right)^{-\frac{n}{2}} \frac{2^j}{j!}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{n+2}{n}\right)^{-\frac{n}{2}} \sum_{j=0}^n \frac{2^j}{j!} \\
 &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{-\frac{n}{2}} \sum_{j=0}^n \frac{2^j}{j!} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}} \sum_{j=0}^n \frac{2^j}{j!} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n}} \sum_{j=0}^n \frac{2^j}{j!} \\
 &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{e^2}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^j}{j!} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{e} e^2 \\
 &= \frac{e}{2}.
 \end{aligned}$$

Der Konvergenzschrift begründet sich wie folgt. Es gilt $\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^2$. Damit erhalten

wir

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n}} &= \frac{1}{\sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n}} \quad (x \mapsto \sqrt{x} \text{ stetig in } e^2 \text{ und Grenzwertsätze}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{e^2}}. \end{aligned}$$

Weiter gilt nach Vorlesung, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n \frac{2^j}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^j}{j!} = e^2.$$

Aufgabe 14.3. (Altklausur 2014 Aufgabe 2) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$

Zeigen sie, dass f stetig differenzierbar auf ganz \mathbb{R} ist. Ist f auch zwei Mal differenzierbar? Beweisen sie Ihre Aussage.

Lösung: Auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist f nach Vorlesung als Verkettung bzw. Produkt differenzierbarer Funktionen differenzierbar. In $x_0 = 0$ prüfen wir den Differenzenquotient

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x)}{x} = \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)}{x} = x \sin\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

da

$$\left| x \sin\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right) \right| = |x| \left| \sin\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right) \right| \leq |x| \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

(Allgemein: $f(x)$ beschränkt $\Rightarrow x f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$). Also gilt mit der Ketten- und Produktregel

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right) - x^{\frac{1}{3}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$

f' ist stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ als Verkettung stetiger Funktionen. In 0 ist f' auch stetig, da für jede reelle Nullfolge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$f(x_n) = 2x_n \sin\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x_n^2}}\right) - x_n^{\frac{1}{3}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x_n^2}}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 - 0 = 0,$$

da $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ und somit auch $x_n^{\frac{1}{3}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ (da $\frac{1}{3} > 0$) sowie $\cos(x), \sin(x)$ beschränkt sind. Also ist f stetig differenzierbar. f ist nicht zwei mal differenzierbar in $x_0 = 0$ und somit

ist f nicht zwei mal differenzierbar: Betrachte dazu

$$\begin{aligned} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x)}{x} \\ &= \frac{2x \sin\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right) - x^{\frac{1}{3}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)}{x} \\ &= 2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right) - x^{-\frac{2}{3}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right) \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist für $x \rightarrow 0$ unbeschränkt, da $x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \infty$. Wähle dazu eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \rightarrow 0$ und $\sin\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x_n^2}}\right) = 0$ sowie $\cos\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x_n^2}}\right) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wähle also x_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x_n^2}} = 2\pi n$$

gilt, d.h.

$$x_n = \frac{1}{(2\pi n)^{\frac{3}{2}}}.$$

Dann gilt $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ und

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x_n^2}}\right) &= \sin(2\pi n) = 0 \\ \cos\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x_n^2}}\right) &= \cos(2\pi n) = 1 \end{aligned}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$ und somit

$$\begin{aligned} \frac{f'(x_n) - f'(x_0)}{x_n - x_0} &= 2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x_n^2}}\right) - x_n^{-\frac{2}{3}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x_n^2}}\right) \\ &= -x_n^{-\frac{2}{3}} \\ &= -2\pi n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty. \end{aligned}$$

Insbesondere konvergiert der Differenzenquotient nicht. Also ist f nicht zwei mal differenzierbar.

Aufgabe 14.4. (Altklausur 2014 Aufgabe 3) Bestimmen sie eine Stammfunktion von $(\ln(x))^2$.

Lösung: Wir wissen aus Beispiel 7.19 (d), dass $\ln(x)$ die Stammfunktion $x(\ln(x) - 1)$ hat. Damit erhalten wir mit partieller Integration

$$\begin{aligned} \int (\ln(x))^2 dx &= \int \ln(x) \ln(x) dx \\ &= x(\ln(x) - 1) \ln(x) - \int x(\ln(x) - 1) \frac{1}{x} dx \\ &= x(\ln(x) - 1) \ln(x) - \int \ln(x) dx + \int 1 dx \\ &= x(\ln(x) - 1) \ln(x) - x(\ln(x) - 1) + x \\ &= x(\ln(x) - 1)(\ln(x) - 1) + x \\ &= x(\ln(x) - 1)^2 + x. \end{aligned}$$

Probe: Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} x(\ln(x) - 1)^2 + x &= (\ln(x) - 1)^2 + 2x(\ln(x) - 1) \frac{1}{x} + 1 \\ &= (\ln(x))^2 - 2\ln(x) + 1 + 2\ln(x) - 2 + 1 \\ &= (\ln(x))^2. \end{aligned}$$

Aufgabe 14.5. Altklausur 2014 Aufgabe 4

Seien $u, v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Bestimmen sie die Ableitung von

$$f(x) := \int_0^{u(x)} w(y)v(x) dy.$$

Lösung: Sei F eine Stammfunktion von w (existiert nach Vorlesung). Dann gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{u(x)} w(y)v(x) dy \\ &= v(x) \int_0^{u(x)} w(y) dy \\ &= v(x)(F(u(x)) - F(0)) \\ &= v(x)F(u(x)) - v(x)F(0). \end{aligned}$$

Damit erhalten wir mit den Ableitungsregeln

$$\begin{aligned} f'(x) &= v'(x)F(u(x)) + v(x)F'(u(x))u'(x) - v'(x)F(0) \\ &= v'(x)(F(u(x)) - F(0)) + v(x)w(u(x))u'(x) \\ &= v'(x) \int_0^{u(x)} w(y) dy + v(x)w(u(x))u'(x) \end{aligned}$$

(Nach Vorlesung haben wir Stammfunktionen nur auf abgeschlossenen Intervallen $[a, b]$ und diffbar auf (a, b) . Ist aber w auf ganz \mathbb{R} stetig, so ist w insbesondere stetig auf $[-1, u(x) + 1]$ für jedes $x \in \mathbb{R}$. Nach Vorlesung gibt es eine Stammfunktion F von w auf $[-1, u(x) + 1]$, d.h. F ist insbesondere in $u(x)$ differenzierbar.)